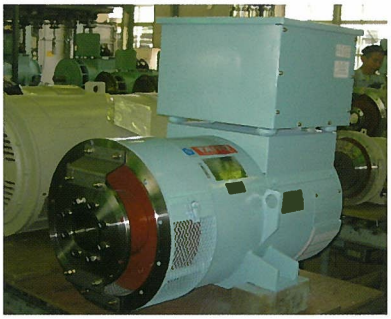
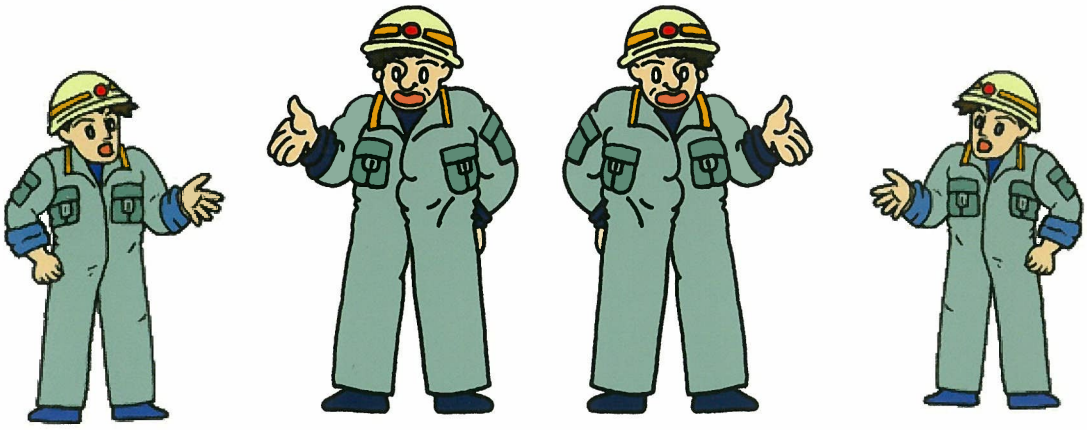
日本財団 The Nippon Foundation 助成事業

船舶の電気設備に関する技術入門書

先輩達が教える初歩からの電気





(社)日本船舶電装協会

船舶に関連する電気技術者の入門書

作　成　委　員　会　委　員　名　簿

（順不同・敬称略）

委員長　　浅田　昭　　国立大学法人　東京大学　生産技術研究所
海中工学国際研究センター　教授

委　員　　木船　弘康　国立大学法人　東京海洋大学　大学院
海洋科学技術研究科海洋システム工学専攻　海洋工学部　准教授

委　員　　今井　治郎　財団法人日本海事協会　機関部　主管

委　員　　中西　毅　　(株)アイ・エイチ・アイ マリンユナイテッド
基本設計部電気システム計画グループ　担当部長

委　員　　梶田　哲郎　三井造船(株)　船舶・艦艇事業本部　基本設計部　電装グループ長

委　員　　関戸　常道　寺崎電気産業(株)　システム事業マーケティング部　顧問

委　員　　草間　寛　　(株)東京計器　第１制御事業部　船舶技術部　第２技術課　主任

委　員　　福永　敦　　大西電機工業(株)　東京営業所　所長

委　員　　柏原　幸史　山陽船舶電機(株)　営業担当　取締役

関係官庁

安田　智行　国土交通省　海事局　検査測度課　船舶検査官
鈴木　長之　同　上
板倉　輝之　海上保安庁　装備技術部　船舶課　船舶工務官

事務局　（社）日本船舶電装協会
松村　純一、水谷　美則、柳樂　泰久、三瓶　義文、新田　泰彦、清水　国明
黒丸　八郎、滑川　智子

はじめに

この本を手にし、正に読もうとしている“あ　な　た”
あなたはラッキーですねえ。
こんなに電気のことがわかる本を目の前にされて！

これまで、電気の入門書を読んでも、なんか
電気とは？　と分かったようで、わからなかったでしょう？

世の中に「電気」に関する入門書が数多く出ていますが、それを見てもなかなかすっきりしなかったのではないですか？　皆さん！！

本書は、船舶に関連する電気技術者の入門書として、これから電気技術者になられる方、また、既に現場で活躍されている方にも使えるように、専門家を集めて編纂されました。

しかし、その内容は頭から丸暗記の技術テキストから脱却し、電気とは何かを肌で感じとれるような、つまり、電気の物性的な様々な現象説明を理解し易いように組み入れ、身近な現象と比較説明しながら、内容、数式と図解を工夫し、今までに無い身近に感じられる入り易い入門書を目指して作成されました。様々な数式、法則の説明においても、暗記するのでは無く、現象を理解してもらう方針で説明されています。こういった編集方針に基づいて作成された本書を通して、無味乾燥と感じられていた数式、法則も、本書を読めばきっと裏側に秘められていた内容が深く理解でき、電気技術が楽しくなると思います。

本書のユニークな点は最初にあります。第 1 編は電気の基礎編ですが、第 1 章、2 章では、電気の始原はなにか、電気とはどういうものかを、丁寧に図解しており、現場で活躍される電気技術者に是非一読いただきたい部分と言えます。第 2 編は実務編で難しい数式を極力避けて分かり易く図を中心にして説明し、更に付録として電気技術者に必要な基礎数学の公式説明を付けた、電気技術者に必携のハンドブックとして活用できるものと確信しております。

委員長　国立大学法人　東京大学
生産技術研究所　海中工学国際研究センター
教授　理学博士　浅田　昭

第 1 編

電気工学入門

物性から電気現象を考える

一般の電磁気学では､静電気学と磁気学の二つに大別され､静電気学では、電荷にまつわる電界のお話から最終的にはコンデンサの諸特性が理解できるような体系になっています。

また、磁気学に関しては、磁石の性質から磁気によって生み出される電流や、電流から生み出される磁気に話が発展し、船内の変圧器や発電機、電動機といった電気の応用機器の分野に話が発展してきます。

このような電磁気学的な体系では、磁気学が論ずる磁界と静電気学で論ずる静電界との間に電荷と電流という決して切り離すことのできない関係が存在しており、また、電磁界という世界では電磁波が発生するなど、様々な電気現象を引き起こしています。

そして、その共通の起源をなすものが電子です。

全ての電気現象を引き起こす源を電子の性質というものに焦点をあてて、考えてみましょう。

第　1　編　　も　く　じ

ページ

第１章　そもそも電気の始原はなに……1
１．電気エネルギー生成に寄与する素粒子 ……1
２．電子のふる舞いが電気（自由電子） ……3
３．電子が動き回る場とは（電界、磁界、電磁界の関係）……5
(1) 電界とは何か……5
(2) 磁界とは何か……7
(3) 電磁界とは何か……9
４．電子と磁石（磁石の成り立ち） ……11
(1) 電子の円運動とスピンの関係……11
(2) 電子は最小の磁石だ ……13
(3) ものによって磁性の現れ方が違う ……14
５．電流が永久に流れるわけ（超伝導の原理） ……14
６．電界と磁界の関係 ……17
(1) 電界中での電子のふる舞い……17
(2) 磁界の中での電子のふる舞い……17
(3) 電界と磁界の関係はこうだ……18

第２章　電気とはどういうものか……23
１．電子のふる舞が電気なのです……23
２．電気はどのようにしてつくられるか ……23
３．静電気 ……24
(1) 静電気の（＋）と（－）はこういう意味なのです ……26
(2) 静電気にはものによって序列があります ……26
４．動電気 ……26
(1) 動電気の（＋）と（－）はこういう意味だ……28
(2) 電流は水のように高い電位から低い電位の方に流れます ……29
(3) 動電気は自由電子が動くことだ……30
(4) 電子の動きを妨げるのは抵抗なのです ……31
(5) 電子の移動を妨げる目安が電圧降下です ……32
(6) 電流の大きさ、電荷（電気を帯びた電子）の大きさ ……32

第３章　電気回路……34
１．電気回路とはどんなもの……34
２．電気回路の特徴 ……34
３．電気の流れ……35
４．電気回路の抵抗 ……35
５．簡単な直流の電気回路 ……36
６．オームの法則 ……37

ページ

7．直列接続と並列接続 …… 40
8．直並列回路の合成抵抗 …… 44
9．直流回路の電源の接続 …… 45
(1) 蓄電池の直列接続 …… 45
(2) 蓄電池の並列接続 …… 45
(3) 蓄電池の接続回路 …… 45

第4章　電流の熱作用 …… 48
1．発熱のメカニズム …… 48
2．ジュールの法則 …… 49
3．熱の発生 …… 51

第5章　電力と電力量 …… 52
1．電力とはなにか …… 52
2．電力量とはなにか …… 53

第6章　磁気と電流の関係 …… 56
1．地磁気 …… 56
2．磁石の性質 …… 56
3．磁気のクーロンの法則 …… 57
4．磁界と磁力線 …… 58
5．磁気誘導 …… 59
6．アンペールの右ネジの法則 …… 60
7．ヒステリシス …… 62
8．電磁力 …… 64
(1) 電磁力が発生するわけ …… 65
(2) フレミングの左手の法則 …… 65
9．電磁誘導作用 …… 66
(1) 誘導起電力は何故発生するか …… 66
(2) 磁界を動かしたとき …… 66
(3) 導体を動かしたとき …… 67
(4) 起電力の大きさ …… 68
(5) 起電力と方向 …… 68
(6) うず電流 …… 69
(7) うず電流と損失 …… 70
(8) うず電流を抑える …… 70
(9) 誘導電動機モデル …… 71
(10) 自己誘導作用 …… 72
(11) 相互誘導作用 …… 74

ページ

第７章　静電気 …… 75
１．静電気のクーロンの法則 …… 75
２．静電誘導 …… 76
(1) 静電誘導とは …… 76
(2) 電磁誘導との違い …… 76
３．電界とは …… 77
４．電気力線 …… 77
(1) 電気力線とは …… 77
(2) 磁力線との違い …… 77
５．静電容量とは …… 78

第１章　そもそも電気の始原はなに

１．電気エネルギ生成に寄与する素粒子

自然界に存在する物質を科学的手段で細分化していくと、これ以上細分化するとその物質の性質が失われるところまできます。これを一般的に分子と呼びます。例えば、食塩（NaCl）の結晶の一粒を砕いていっても、食塩としての性質をもつ間はどんなに小さくても食塩ですが、これをさらに細分化すると、ナトリウム（Na）と塩素（Cl）という元素に分解されます。

Na も Cl も私たちが知っている食塩ではなく、Na どうし、Cl どうしという同じ性格を持つ最小単位となり、これを原子（atom）といいます。

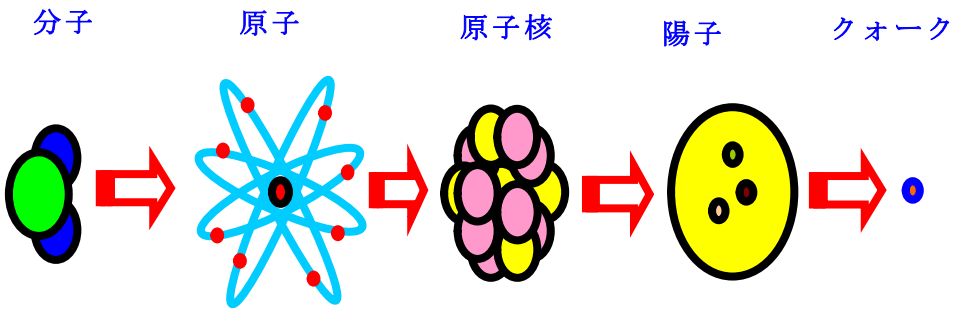


図 1.1　電気の始原

原子は､ギリシャ語でこれ以上分解できないという意味で atom と名付けられています。私たちの体、動物、魚、木、花などの地球上のものは全て、１億分の１センチメートル程度の大きさの原子という粒子からできているのです。

この原子のような物質の基本的な構造や、互いに及ぼし合う力の根源を解き明かそうとする学問は高エネルギ物理学や量子力学と呼ばれ、この学問の歴史は、粒子や素粒子の発見を通して行われてきました。素粒子とは内部構造をもっていない粒子を指した総称です。

原子は、芯に原子核と、その周りを公転する電子とで成り立っております。原子核は、陽子と中性子で構成され、さらに陽子や中性子は、クォークと称される、より基本的な素粒子から作られています。

また、電子は、レプトンと呼ばれる素粒子の一つで、それぞれ固有の電荷をもつことが知られています。

電子の質量は､陽子の質量の約 2000 分の 1 程度の重さで､極めて軽いため、加速・減速されやすく、その移動によって物質の状態を変化さるために、電子は電気現象や、光の現象に深い関わりあいをもっています。

私たちの身の回りの身近な酸素原子である酸素の構造をモデル化すると、以下のようになります。

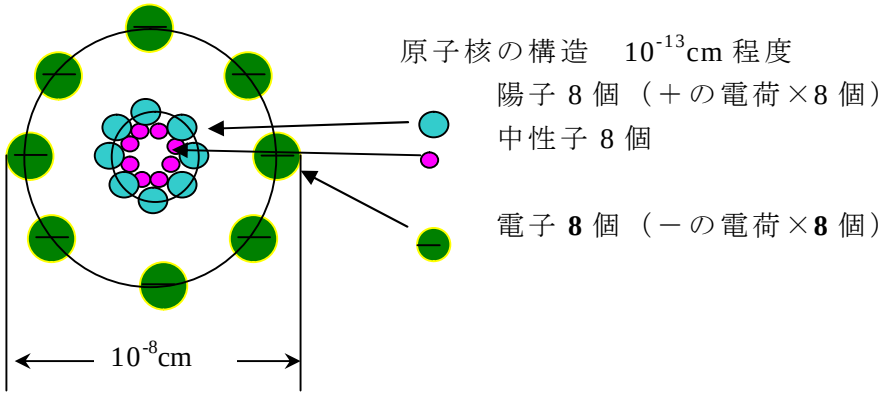


図 1.2　酸素原子のモデル

このモデルの中に出てくる電荷とは、電気量をもつ粒子で、例えば陽子はプラス（+）の電気量をもつ粒子、電子はマイナス（－）に帯電した素粒子を意味しています。

陽子と中性子は、クォークという素粒子からできており、陽子も中性子も３個のクォークからできています。（図 1.3 参照）

そしてクォークには、2/3 のプラス電荷（アップ:u）をもつものと、1/3 のマイナス電荷をもつもの（ダウン:d）の２種類があり、この組み合わせで陽子と中性子ができていると考えられています。

電荷　**u**+**u**+**d**=2/3+2/3-1/3＝1　　**電荷**　**u**+**d**+**d**=2/3-1/3-1/3＝0

図 1.3　クォークが作る陽子、中性子

三つのクォークの組み合わせによって、電荷の合計が１のときが陽子であり、0 のときが中性子になります。また、図 1.3 はバネのようなもので接続されていますが、この意味は互いの力を説明するためのものです。

したがって、陽子と電子は同じ１の電荷をもち、中性子は 0 の電荷をもつと考えられています。

ここで注意することは、電荷という物質が存在するのではなく、電荷をもった粒子（例えば電子や陽子）が存在することであり、電荷が移動する）とは、電荷をもった粒子が移動するということになります。

２．電子のふる舞いが電気（自由電子）

電荷をもった素粒子としての電子の存在をもう少し調べてみましょう。

原子核の周りを公転している電子は、電子殻といういくつかの層に分かれて存在しており、電子は原子核の周りを惑星のように一定の軌道を回っていると考えられていました。

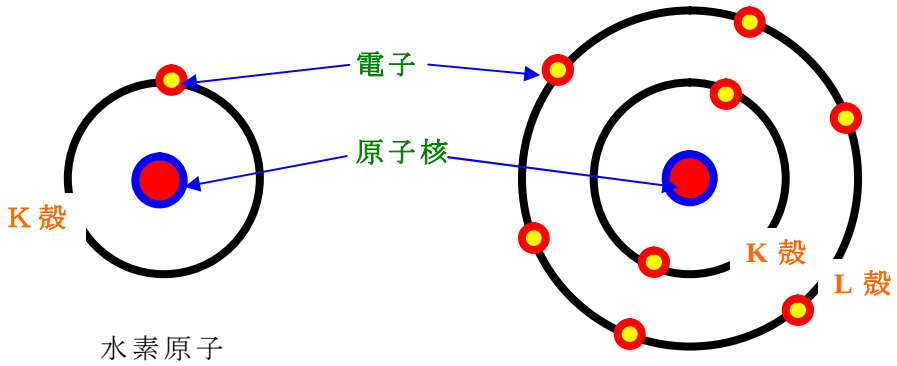


図 1.4　原子モデル

この軌道には、K殻、L殻、M殻・・・という名前がついており、原子核から近い順に、K殻、L殻、M殻という層に分かれて存在しており、それぞれの電子殻に入ることのできる最大の電子数は決まっていて、表 1.1 のようになります。

表 1.1　電子殻に収納可能な電子数

殻	主量子数	電子数
K殻	1	2
L殻	2	8
M殻	3	１８
N殻	4	３２
O殻	5	５０
P殻	6	７２

各軌道は、s 軌道、p 軌道、d 軌道という電子軌道に、分けられます。

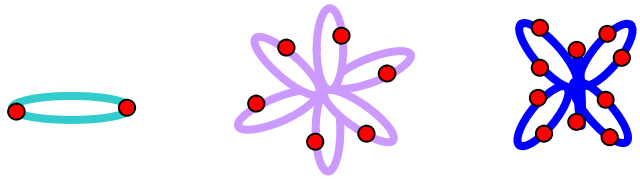
K殻は、s 軌道だけですが、L殻の電子軌道は、s 軌道と p 軌道からなります。s 軌道には、電子が 2 個、p 軌道には電子が 6 個入ることができ、M殻になれば、s 軌道と p 軌道のほかに d 軌道が加わり、M殻には、1 個の 3s 軌道、3 個の 3p 軌道、5 個の 3d 軌道をもつ電子の軌道ができあがります。つまり、d 軌道には電子が１０個入ることができ、M殻には電子が都合１８個入れることができるのです。

これは、殻はK殻を n=1、L殻を n=2、M殻を n=3 としていくと、各殻に入る電子の数は、$2n^2$ となることを示しています。

図 1.5 に M 殻の電子の軌道を例示しました。

s 軌道、p 軌道、d 軌道及び複合する電子の軌道形状は、従来から説明さ

れてきた原子核の周りを整然と周回する電子軌道と異なって、様々な軌道形状をとることが分かってきました。



S 軌道（1）　**p** 軌道（3）　**d** 軌道（5）
２個の電子　６個の電子　１０個の電子

図 1.5　M 殻を持つものの例

詳細な電子の軌道が知りたい方は、専門書の活用をお勧めします。

図 1.5 は、電子が電子殻という円上に示すように回っているようなイメージを受けますが、量子力学という学問が進むうちに、電子の存在は電子が発見される確率でしか表せないことが分かってきました。

つまり、軌道は、図 1.6 に示すように、電子がこのあたりにいる確率が高いとか、低いといった表現で表される電子の見つかる確率の高い場所をつないだものが軌道の形になるということです。

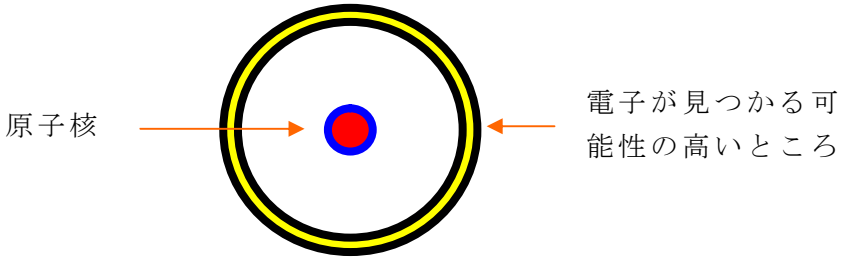


図 1.6

これらの軌道にある電子の中で、内側の K 殻にある電子のエネルギが最も小さく、L、M・・・・と外側に行くほど大きなエネルギをもっています。世の中には、９２個の原子がありますが、同種の原子どうしの結合で元素ができ、異種の原子の結合では様々な分子や化合物ができます。

その結合形態には、イオン結合、共有結合、金属結合、誘電結合そして水素結合の５種類の結合方式がありますが、いずれも原子のプラスの電荷やマイナスの電荷による電気の力によって、結合したり離れたりして物質どうしの反応が引き起こされています。イオン結合などはこの例です。

また、結合したり離れたりする反応は、媒介となる電子のふる舞いによって引き起こされ、これらの軌道によって、もつ電子のエネルギが非常に大きな役割を担っているのです。特に、外部から光や熱のようなエネルギを得ると、電子のもつエネルギは増大し、高いエネルギを必要とする軌道に移ったり、新しい軌道を作ったりします。共有結合がこの例です。

また、金属を熱して温度を上げていくと、金属内部の電子は、その運動エネルギが大きくなり、ついには内部の原子核の引力に打ちかって、金属の外に飛び出す現象も現れてきます。

このとき、熱によって飛び出た電子を熱電子といい、このような現象を熱電子効果といいます。この現象を応用したものに整流器や増幅器があり、昔使用されていた真空管などもあります。

熱電子効果のように温度が上がると電子が飛び出す現象のほかに、レーザのように光のエネルギを吸収する、電界のエネルギを受ける、磁気のエネルギを受ける等、電子が外部からエネルギを取得すると、電子の中にはその軌道に留まっていられなくなり、外側の軌道に飛び移ります。

さらに、エネルギを受けると軌道から飛び出してしまう電子もあります。このように原子核の拘束を受けなくなった電子を自由電子と呼んで、実際に導体（電気導電体）内を流れる電流の担い手になるのです。

このような状態の電子を特定の原子の原子核に捉われない電子（伝導電子）として自由電子といいます。

ここで、電気の始原は何かと問われるならば、電子や陽子、またそれらが固まりあって存在する電気的に帯電した粒子の動きといえるでしょう。

３．電子が動き回る場とは（電界、磁界、電磁界の関係）

(1) 電界とは何か

電界とは、電気のある世界（場所）をいいます。

送電線や家庭の電気器具の周り全てに電界がありますが、家庭の電灯線（１００ボルト）程度では、電界を感じることはありませんが、テレビのブラウン管のそばに手をもっていくと、皮膚が吸い寄せられたような感じうけるとか、あるいは乾燥した季節に衣服がまとわり付くことがありますが、このようなときは、数千から数万ボルトの電界が発生し、この電界によってそのような現象が起こっているのです。

自動車から降りたときバチッと感じるのも、シートと衣服あるいは衣服と衣服の摩擦によって高い電圧（数万ボルト）が発生し、車体と地面との間で電気が流れた結果（放電）によるものです。

一般に電界の強さは、発生源からの距離が大きくなると共に急激に弱くなります。したがって、高所の１０万～５０万ボルトもある送電線も、普通は強い電界が発生していても身体に感じることはないのです。

図 1.7 は、船内の電路に発生する電界を表したものですが、このように低圧（４４０ボルトや２２０ボルト）でも電界が現れることを示したものです。

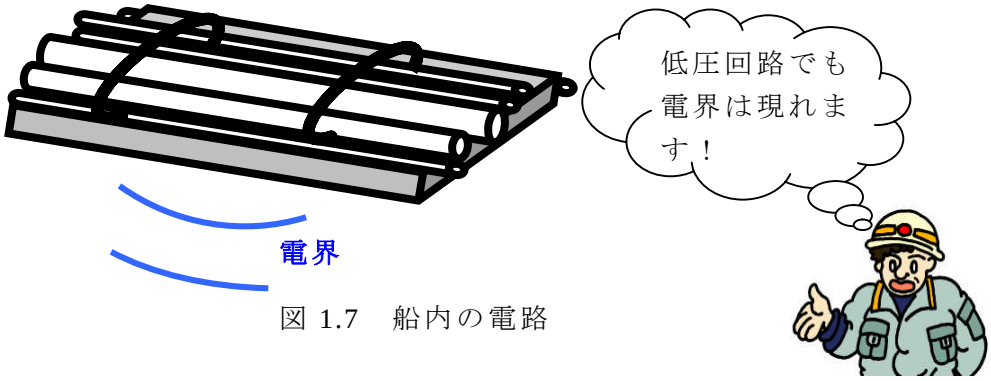


図 1.7　船内の電路

電界を分かりやすく表現したものが電気力線です。

電線は、実際の物理的な線ではなく、電荷が存在することの効果を表現するために、図 1.8 のように電気力線は便宜的に表す線です。

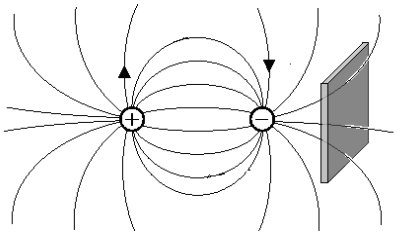


図 1.8　電気力線の概念

図 1.8 は、（＋）を球とするとき、表面積（$4\pi r^2$）から E の強さで電気力線が出ることを示しています。

球から出る電気力線は、単位表面積×電界の強度 $E=\dfrac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon\cdot r^2}$、（$\varepsilon$ は誘電率）ですから、＋から沸き出して、－に吸い込まれる電気力線の本数は $\dfrac{Q}{\varepsilon}$〔本〕になります。したがって、電界は、この電気力線の数は電荷 Q〔C：クーロン〕の大きさによって変わるとことを示しています。

これらをまとめると次のようになります。

① 電気力線上の任意の点の接線はその点の電場の方向を示します。

② 単位面積を通過する電気力線の本数（電気力線密度）は、その場所の電場の強さに等しい。

③ 電界の大きさは、電気力線の面積密度に等しく電界の方向は電気力線の矢印の方向で表します。

これらの定義から電気力線には次の性質があると考えられます。

- 電気力線には向きがある。
- 電気力線は無限遠からくることもある。
- 同じく電気力線は無限遠に向かうこともできる。
- 電気力線どうしは交差しない。

・ 電気力線の密度が上がった場は電場が強い。
・ 電気力線は枝分かれしない。
・ 電気力線は平行であれば、それは一様な電場がある。
・ プラスからマイナスの電荷に向かう電気力線は最短経路を通る。
・ 電気力線は同じ向きであればそれどうしが反発する。

実際に電気力線の性質を用いて、電場の強さがものに与える力の影響を考えると理解しやすいので、この性質はよく覚えておきましょう。

(2) 磁界とは何か

電界と同じように、磁気のある世界（場所）を磁界といいます。

磁力線は、棒磁石やフェライトの磁石、地球（地磁気）の他に、送電線や家庭の電気器具など、電流が流れている箇所は磁力線を発生するため、周辺に磁界が現れます。

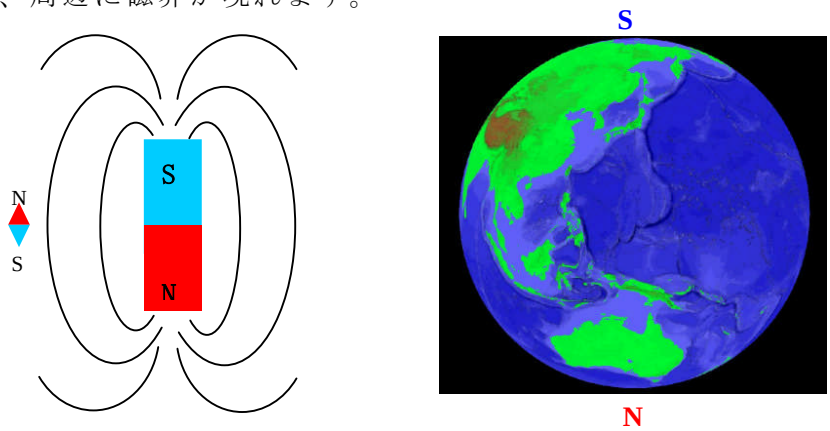


図 1.9　磁界

図 1.9 に示した地球も磁石と同じように磁気を示すことは皆さんもよくご存知と思います。

方位磁石を持ってくると、北を N 極が、南を S 極が指しますが、これは北極付近に磁極の S 極が、南極付近に磁極の N 極があるためです。磁石の磁針はそれぞれの磁極に引き付けられて方位を示すのです。

方位磁石

羅針盤（磁気コンパス）

磁石では、磁石の磁極が磁界をつくる。磁石の磁極は、両端に図 1.10 のように現れます。

図 1.10　磁石と磁

磁石の中にも磁極は無数に存在するのですが、実際、磁石を図 1.11 のように分割すると、分割面に磁極が現れます。しかし、磁石の中の磁極はプラスとマイナスで打ち消し合っているので、このような無数の磁極は考える必要はないのです。

図 1.11　磁石の分割と磁極

磁極は、電気の電荷に相当するものなので、磁極がつくる磁界の方向と大きさは、単純な点磁極の場合は、磁界が点磁極から図 1.12 のように放射状に出る(a)、又は入るだけの(b)の組み合わせです。

これを、磁極のクーロンの法則と呼びます。

しかし、電気力線と異なって、必ずプラスとマイナスの磁極が現れるので、それらがつくる磁界は、図 1.12 のように複雑になりますが、磁力線の場合には、プラスの磁極がつくる磁界と、マイナスの磁極がつくる磁界を重ねあわせて考えることができるので、結局、磁石と磁界の関係、すなわち磁石と磁力線の関係は図 1.13 のようになります。

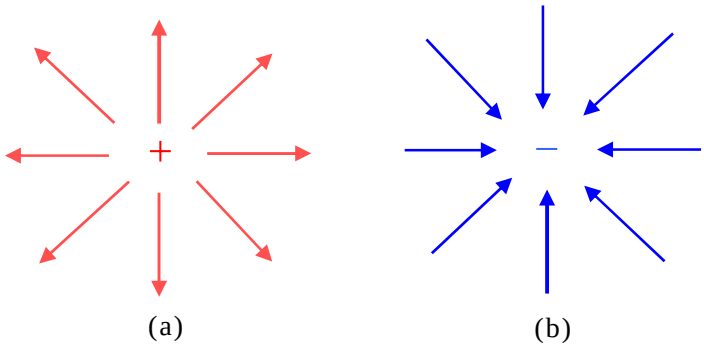


図1.12　磁極の性質（磁極のクーロンの法則）

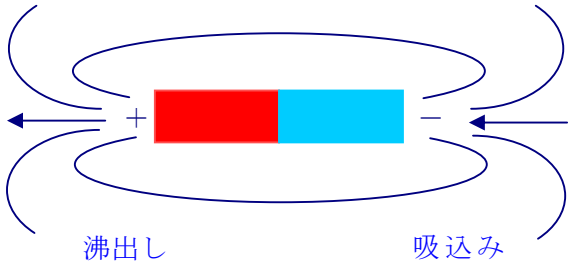


図 1.13　磁石と磁力

ここで、磁力線はプラスの磁極（N 極）から沸き出し、マイナスの磁極（S 極）へ吸い込まれていることに注意しなければなりません。コイルが作る電磁石の周りの磁界もこのような形をしています。

磁界を考えるときは、向きと強さが大切になります。

次に、磁界の性質を書きました。

① 磁界の向きは、その場所に置いた方位磁石の磁針の N 極の指す向きで分かる。

② 磁界の向きは磁力線の向きで表わす。

・磁力線は N 極から出て S 極に向かう曲線で互いに交わらない。

・磁界の向きは、磁力線の向きで磁針の N 極が指す向き。

③ 磁界の強さは、磁力線の間隔によって表わせる。

・磁力線の密なところは磁界が強く、まばらなところは磁界が弱い。

④ 磁石が出す磁力線の向きは、磁石の N から S に向かう。

⑤ 磁力線は、各々が反発し最短経路を結ぶ。

⑥ 磁力線は微少磁区の連続と考えてよい。

・磁界は、電流または磁極から成り立っている。

エルステッド（ H. C. Oersted）は、電流による磁力を発見し、ファラディ（M. Faraday）は、1831 年に磁石とコイルの相対運動によって電流が流れることを実証しました。

これは、電磁誘導現象で、コイルに磁石を出し入れすると、コイルに起電力が生まれ、電気回路があれば電流を流し、逆にコイルに電流を流すと石に力を生じさせる現象です。

電流が流れると、必ず周りに磁界を生じ、磁界が変化すると電流が流れる、といったように電流と磁界は、お互い切り離せないものです。

つまり、磁力線の量を変化させると電荷を動かす（電流を流す）ことができ、電荷が動くと磁界が発生し、磁石に力を及ぼす現象で、発電機や電動機（モータ）等の原理になっています。

(3) 電磁界とは何か

電磁界とは、電界と磁界が合わさったものを意味します。強さが変わらない電界（静電界）と磁界（静磁界）の組み合わせからは、特別な現象は

生まれてきませんが、電流や磁気の方向や強さ（量）が変化する（交流）と電界と磁界が互いに影響し合うようになり、電界あるところに磁界が生じ、磁界のあると電界が生じるというように、次々と波のように遠くに伝わる現象が生まれます。

このように波の伝わる世界（場所）を電磁界といいます。

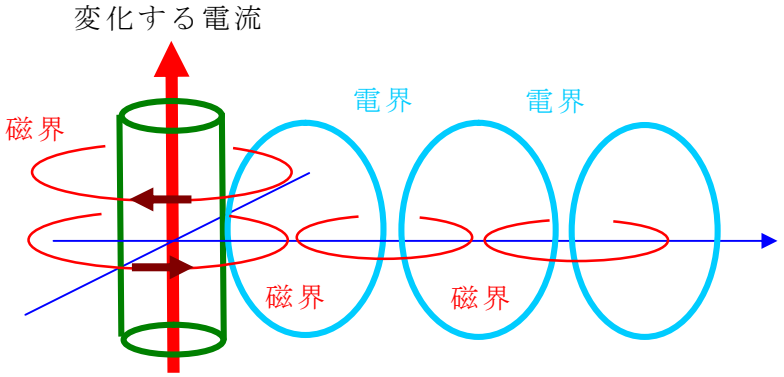


図 1.14　電磁界のイメージ

電界と磁界により構成される波のような性質を持った現象を電磁波といいます。文字の組み合わせからも分かるように、電磁波という言葉は、電気の「電」、電磁気の「磁」、波長の「波」が合成したものなのです。

電場と磁場は相互に関連し合い、電磁場となってこの誘導を繰り返す形で、水に石を投げ入れたときの波紋のように進行していくのが電磁波と考えてもよいでしょう。電磁波が波で、電磁界は波のある海というようなものですね。

時間的に変化する磁界や電界は、一対で電界があるところには磁界もあると考えられています。電界と磁界は、図 1.14 に示すように、相互に直交（鎖交）して切り離すことができないものです。

ここで、電界と磁界を分かりやすく整理すると、次のようにイメージできます。

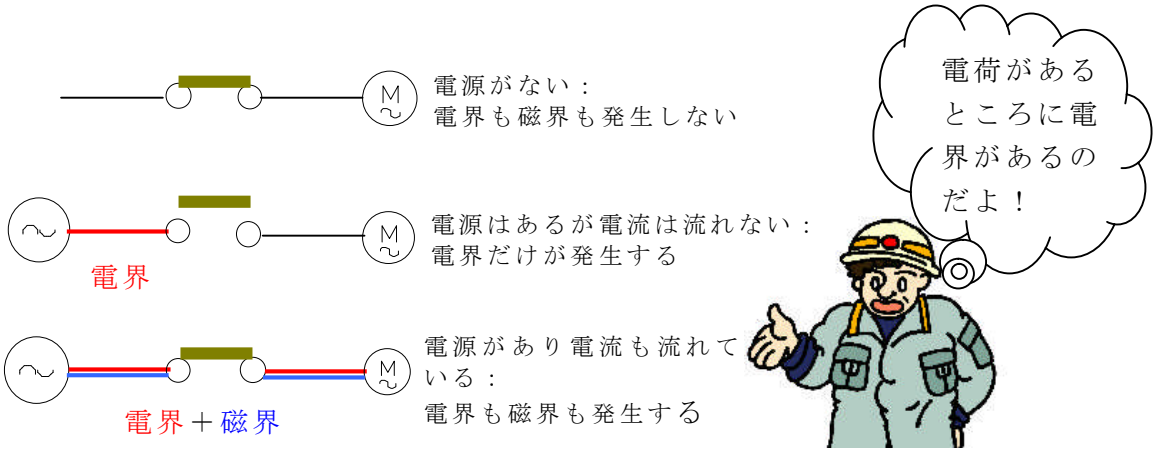


図 1.15　電界と磁界

これまで、学習したことをまとめると、電界や磁界の中で、コイルや磁石が動くと、起電力が発生します。この起電力によって、電位が発生し、発生した電位によって電荷の分布状態にかたよりが生じます。

電荷の分布状態のかたよりを安定常態に戻そうとして、電荷の移動（電流）が生じます。このとき、電流は、電荷をもった電子の移動であり、電子の移動は、原子を構成する電子、陽子、中性子の性質や、そこに与えられるエネルギによって、その動き方が決まるので、私たちは、実用上電線という媒体を使って移動させています。

電線という媒体を用いることで、より確実に私たちの生活の中で電気が利用できているのです。

４．電子と磁石　（磁石の成り立ち）

全ての物質は原子からできています。もちろん、磁石になる物質も原子からできています。ここでは磁石の成り立ちを考えて見ましょう。

鉄（Fe）やニッケル（Ni）などは、磁石になりやすい金属で、その分子は非常に微細な磁石からできています。

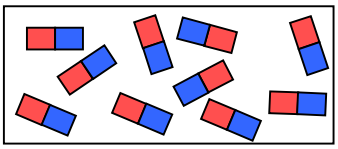
これを分子磁石又は磁気分子といい、磁区と呼ばれる小さな区域でわけられています。

磁区の一つを微小な磁石で表してみると、近くに磁石がない場合の鉄片は、図 1.16 に示すように、その磁区の小さな磁石は、ばらばらの方向を向いているため、磁気的には中和され、全体としては磁石の性質をもちません。

そこへ両端に磁石を近づけると、各磁区の小さな磁石は、図 1.17 に示すように、同じ方向に並び、Ｎ極とＳ極ができます。

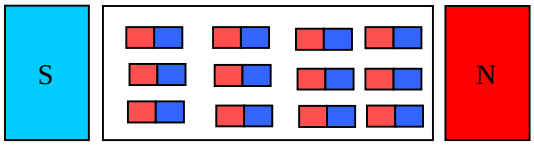
このとき、近づけた磁石を離しても、各磁区の配列が壊れなければ、その鉄片は永久磁石になります。

これが通常の磁石というものの説明です。



近くに磁石がないときの磁区の中の分子磁石の配列

図 1.16



近くに磁石を近づけた場合の磁区の中の分子磁石の配列

図 1.17

(1) 電子の円運動とスピンの関係

通常の磁石の説明は、上述のとおりですが、ここでは分子磁石を、原子レベルに掘り下げて考えて見ましょう。

電子は、原子核の周りを回る運動の以外に電子スピンという回転運動を行っており、この回転運動が円電流を生じさせます。丁度、地球や他の太

陽系の惑星が、自転しながら太陽の周りを回転（公転）しているようなイメージです。電子が何故スピンしているかということに関しては、難しい量子力学の世界の話ですので、ここでは、電子は本質的にスピン運動をしているものであると認めて下さい。

電子がスピンという回転運動をしていることを知れば、電子が電荷をもっていることと併せて考え、電子磁石という存在を理解することができるのです。特に、電子は同じ位置に止まっていたとしても、外に磁気を出すことから、原子核の周りを回っている以外に電子自体がスピン運動（自転運動）をしていると推測され、また、種々の実験の結果においても確認されています。電子による負の電荷は、回転運動によって円電流を作り、円電流が作られると、それをよこぎる磁力線が生じ、その磁力線は棒磁石が存在するのと同じ作用をもたらしています。つまり、電子はそのスピンする性格によって先天的に磁石の性質を持っているのです。この磁気をボーア磁子（マグネトロン）と呼びます。

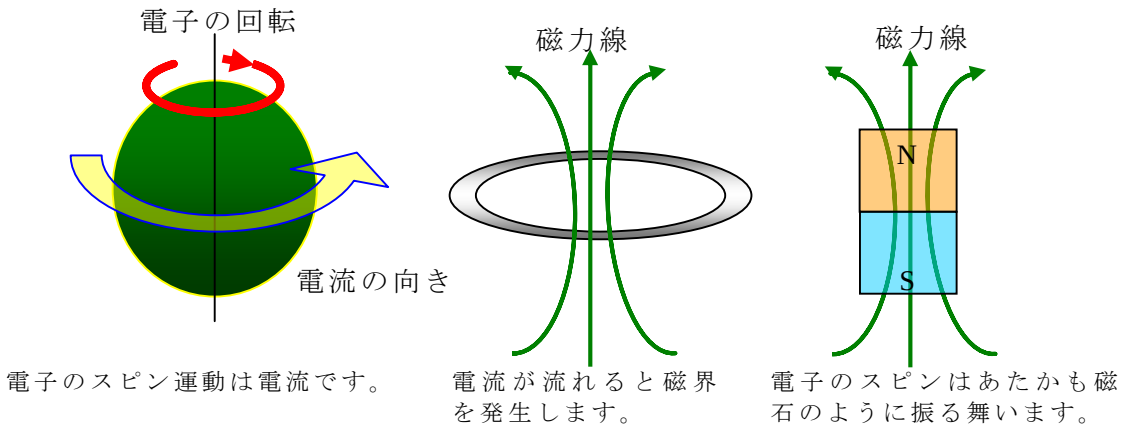


図 1.18　電子のスピンと磁力線

例えば、地球の自転軸の場合の北極と南極のように、北極に対応する荷電粒子の軸の末端を上極、南極に対応する軸の末端を下極と呼ぶことにすれば、荷電粒子の周囲を右回りに旋回している電荷の状態をプラス（＋）とし、左周りに旋回している場合をマイナス（－）にすることにすると、電子の場合は、左周りに旋回していることで（－）の電荷の状態を生じます。

なお、参考ですが、右回りに旋回している場合は（＋）の電荷の性質を生じることとなります。このような状態を陽電子と呼ばれます。また、陽子の場合は右回り回転することで（＋）の電荷を形成し、左周りに旋回している場合は、電荷が（－）となり、反陽子と呼ばれている常態の粒子となります。

このように、電子のスピン軸は、逆の状態を保ち、外部エネルギの状態によって入れ替わることができると考えられています。その入れ替わった状態によって、電荷がマイナス状態になったり、プラスの状態になったり

変化し、それに伴い磁力線の向きも変わるのです。

(2) 電子は最小の磁石だ

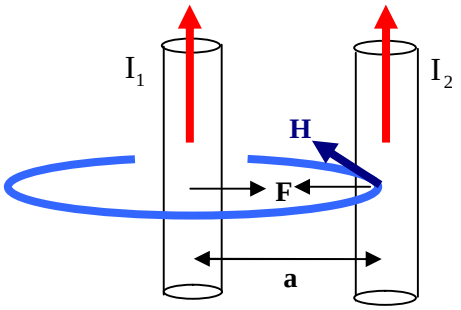
原子は、その中心に原子核があって、その周りをいくつかの電子が周回していることは前述のとおりです。

ファラディの法則により、電荷が移動することによって磁力線が発生するのですが、電子はマイナスの電荷を有して運動していることは、磁場を発生させるはずです。

しかし、実際に永久磁石を作る原子の場合、磁力の発生という点において、原子核の周りを回っている電子の軌道運動の寄与よりも、むしろ電子の自転（スピン）の磁気効果の方がずっと強く、結局、電子自身が永久磁石だと考えることができるようです。

このように考えると、電子はスピンすることによって最小の磁石になっているといえるのです。

複数の自由電子が､一斉に一定方向に移動すると電流現象を表しますが、この場合は、陽子に近づく電子のように、複数の電子のスピン軸が一定の方向にそろい、その結果、電子間で引力が生じ、これが同じ方向に電流が流れている平行導線間に生じる引力の発生源(平行導線間の電子間の引力)になると考えられます。



二本の平行銅線に電流 I_1、I_2 を同じ方向に流したときに、電磁力 F〔N〕は導体に流れる電流 I_1、I_2 の方向が同じであれば、２本の導体は互いに引き合う力として作用し、電流の方向が各々反対の向きであれば、互いに反発する力として作用します。

図 1.19　電流の相互間に働く力

これは、電磁気の教科書に出てくる電流の相互間に働く力に関する説明ですが、この根幹には、電子のスピンという考え方があることを説明しています。

また、電子の回転方向は、外部から時間的に変化するエネルギを受けると回転軸の上下の向きは一斉に逆転し、磁極が変わり外部到来磁界の増加を阻止する向きを示します。したがって逆向きの磁性が現れます。

これが、いわゆるレンツの法則で示されるものです。

レンツの法則（ファラディの法則）は、コイルを貫く磁力線が発生し磁場ができる。その磁場の変化に比例した量の起電力が発生する。

この起電力によって発生する電流の向きは、磁力線の変化を妨げるような向きです。この磁場は、棒磁石の接近または遠ざかるのを妨げる向きとなります。このように磁力線の向きが変化するのは、電子のスピンの回転

軸が変化するからと考えられています。

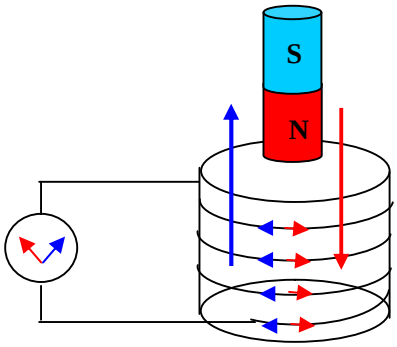


図 1.20　磁界の変化と逆起電力

(3) ものによって磁性の現れ方が違う

電子のスピンには、上向きと下向きの２種類があって、磁界に反応しない磁性物質は、原子の軌道に各々同数のスピンの向きをもった電子があり、全体として中性になっていると考えられている。

これは、荷電粒子どうしが接近すると、お互いのスピン軸が反平行状態になるように、どちらかの動きやすい荷電粒子の上極と下極が逆転する現象（スピン軸の逆転）が生じることで、エネルギレベルが最も低い安定した状態に落ち着くものとされています。この場合は、電子間の引力で電子どうしが至近距離まで接近して、電子どうしがクーパ対を形成することになると考えられています。

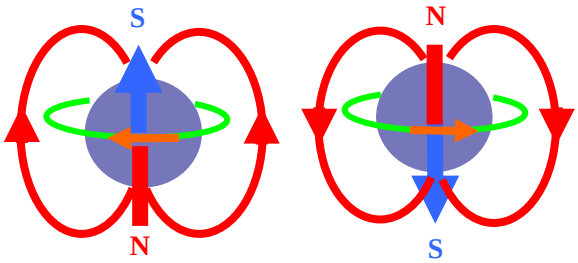


図 1.21　クーパ対

一方、鉄原子のような強い磁性を持っている場合、第三の軌道にスピンが同じ向きの電子４個が不足していることが、鉄が磁界に対して強い反応をする（強い磁性を持つ）原因であるといわれています。

従って、軌道中の電子の数が物質としての磁性を決める要素になっていると考えられています。

5．電流が永久に流れるわけ（超伝導の原理）

超伝導という言葉は、今や一般化されていますが、いったい超伝導状態とは何でしょうか。一般的に固体内においては、電気の担い手である伝導電子やホールが与えられた電場の中で加速されて行きますが、導体内の金属結晶では、不純物や結晶のできの悪さ（結晶不整）、熱振動によって生

ずる格子振動量子、フォノンも邪魔をして、電気抵抗を作り出しています。

ここで伝導電子は、色々な抵抗となる物体にぶつかりながらも、電場に押されて進んで行くことになりますが、これはあたかも朝の混雑した駅の中で、なかなか行き先のホームにたどり着けない状態と同じです。

超伝導とは、これらの導体内の電気抵抗がゼロになった常態での電子の動きです。

一般的に金属は、温度が高い程その電気抵抗を増す傾向がありますが、極めて温度が下がった金属においては突如電気抗がゼロになるものがあります。これらの金属として最初に見つけられたのは水銀（Hg）です。

常伝導状態の金属の自由電子は、各々エネルギの向くままに互いに関連のない状態で動いていますが、超伝導状態の金属中の自由電子は互いに逆のスピンをもつ電子どうしが、ひとつの対を作り（クーパ対）（図 1.21 参照）、磁気的に中性となった状態でまとまって動くことになります。

クーパ対を作ると、磁気的に中性の状態（磁場ゼロの状態）になります。

超伝導体内部の磁場がゼロであるということは、超伝導体自身が外からの磁場を打ち消すように逆向きに磁化することです。

普通の金属でもこのように外からの磁場と逆向きの磁化をもつものもありますが、その磁化は非常に小さいものです。

超伝導体では、この逆磁性（以下「反磁性」という。）が非常に大きく、内部での磁場を完全にゼロにしてしまうので完全反磁性といい、マイスナー効果と呼んでいます。

このように超伝導状態になった金属は、完全な反磁性体となるので磁力線はその内部に侵入することができないため、超伝導状態となった円盤の上に磁石をおくと、この効果のために磁力線が超伝導体を避けるようになるから、磁石が浮き上がる現象が起きます。

この実験は、よく超伝導体のデモンストレーションに利用されています。

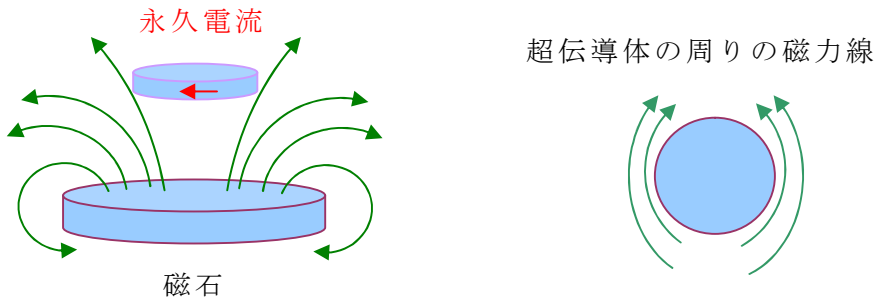
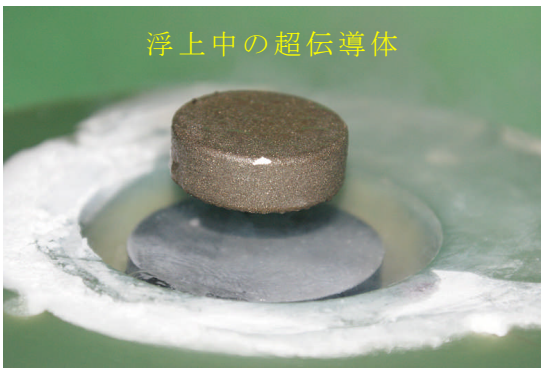


図 1.22　マイスナー効果

図 1.22 は、超伝導の状態にある物質に外部から磁界を加えて、物質内部の磁束が零になっている状況を示したもので、超伝導体が完全な反磁性をもつことによって、超伝導体に近づけた磁石は、磁力線をはじき返して電磁力で空中に浮いている図です。



写真提供元
東京大学大学院
新領域創成科学研究科
先端エネルギー工学
大崎　博之　教授

図 1.23　マイスナー効果の実験

絶対零度（－273.15℃）まで温度を下げると、スピンしている電子が互いに逆のスピン軸をもつクーパ対を作り、このため電気抵抗となる物質と衝突しても、散乱されることなく整然と動けるので、電子は電気抵抗がなくなると考えられています。

スピンを伴って移動している自由電子も一度電場のもつエネルギに押されると、あたかも物質が宇宙で引力のない状態で等速直線運動を続けるように、エネルギを消費しないで動き続けます。

これによってオームの法則からはずれ、一度流した電流が流れ続けるとう状態になります。これが超伝導状態であるといわれているのです。

ここで、超伝導の実験例として永久電流をひとつ紹介しましょう。

超伝導材料で金属リングを作り、棒磁石を入れておきます。

超伝導状態で棒磁石を引き抜くと、ファラディの法則でリングに誘導電流として円電流が生じます。

常伝導状態では、リングの内部抵抗により円電流はすぐに消えてしまいますが、超伝導状態では、このリングに流れる円電流はあたかも永久磁石であるかのように永久に流れ続けるのです。

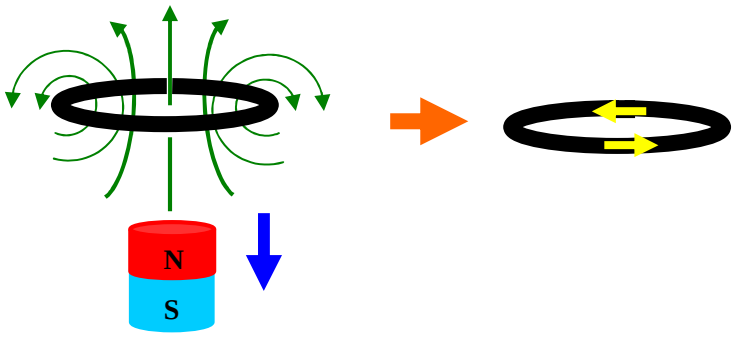
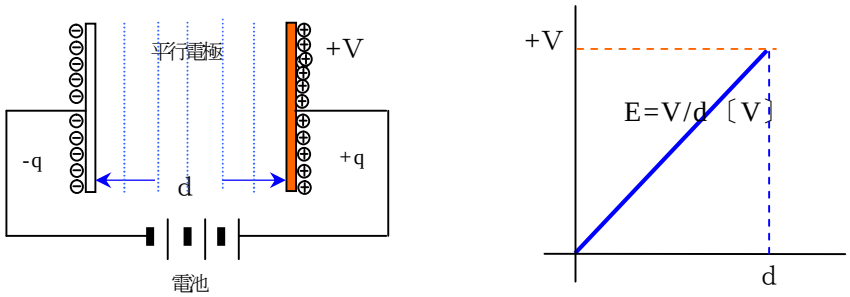


図 1.24　磁界を取除いた後の電流

６．電界と磁界の関係

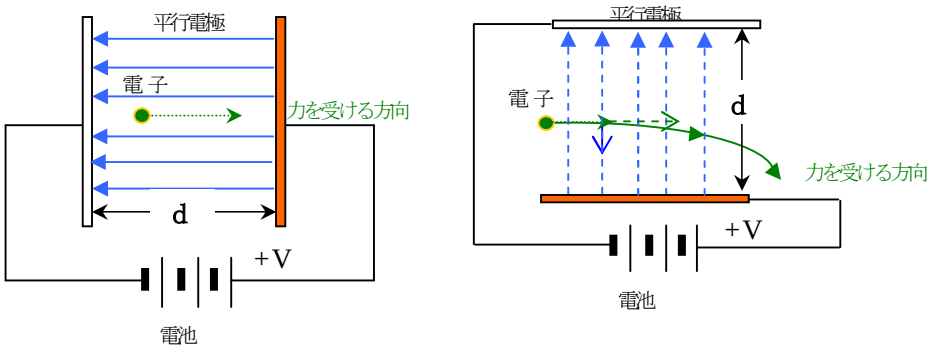
(1) 電界中での電子のふる舞い

電場（電界）とは、例えば 2 枚の平行板に電池をつなぎ、その平行板間に電位差を作ったような形として表現されますが、その電位の差は平行板間の距離に比例し、電界の強さ（E〔V〕）が定義されます。



平行電極における電界分布図　　平行電極内の電界の強さ(b)E=V/d

図 1.25　電界の大きさの定義



(a)平行板の中の電子は、電界からエネルギを得て加速されます。　　(b)平行板の中に打ち込まれた電子は、電界からの力が働いて軌道がそれます。

図 1.26　電界の中の電子の動き

電界の中に電子を置くと、電子は電界と反対の向き（電位の高い方）に力を受けます。（図 1.26(a)）

電界の中に電子を置いたり、打ち込んだりすると電子は電界から力を受け、電位の高いほうに引かれながら加速します。（図 1.26(b)）

これらの力を受けて、電子を加速させたり運動エネルギを増大させたりすることができます。

この動きは、初速をもった電子に、上下に電界をかけることによって、その電子の軌道をコントロールし、到達点を変位させることができるので、電子銃、ブラウン管等々にも応用されています。

(2) 磁界の中での電子のふる舞い

磁場（磁界）の中に電子を置いたり打ち込んだりすると、電子は磁界から力を受け、フレミングの左手の法則に従って磁界の方向（**N→S**）に応じて決まった方向に変位します。

この電子を変位させる力を、ローレンツ力といいます。電荷 q〔C〕をもつ１つの粒子が磁場中を運動するときに受ける力ローレンツ力は、$f = q \cdot v \times \mathrm{B}$〔N：ニュートン〕で表されます。

この式の意味は、上向きの磁界の中に垂直に電子が速度 v で入ってくると、電子は y 軸方向にローレンツ力 f〔N〕を受けます。（フレミング左手の指で）ローレンツ力は、速度に対して常に垂直なので磁界に垂直な面内（$x\,y$ 面内）で、電子は（等速）円運動をします。

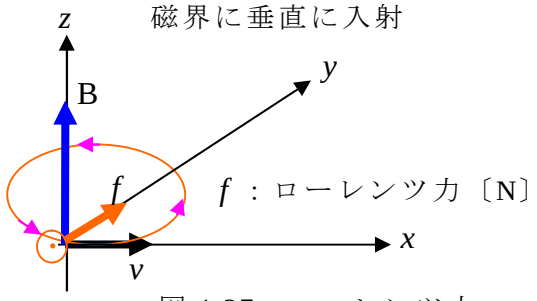


図 1.27　ローレンツ力

これは電界の中の電子の運動と同じように、磁界でも電子の進む方向を変えることができるということを意味しており、中でも電子が一様な磁界の中を磁界に垂直な平面上で動くときは、等速円運動も行わせることもできることを示しています。

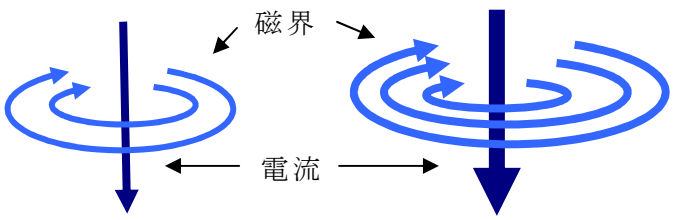
また、磁気の強さや方向等、磁界のかけ方によってはＵターンや、らせん運動もさせることができます。

(3) 電界と磁界の関係はこうだ

①　電流の量を変えると磁界ができる。

$$\phi = k \cdot n \cdot \mathrm{I} \ 〔\frac{wb}{m^2}〕$$ （直流電流による磁界）

｜ k ：比例定数、n ：コイルの巻数〔回〕、I〔A〕：電流｜



電流が増えると磁界も強くなる

図 1.28　電流と磁界

② 電流の量を変えると、それに合わせて磁界の強さが変わります。電界はこの磁界の変化によって発生するのです。

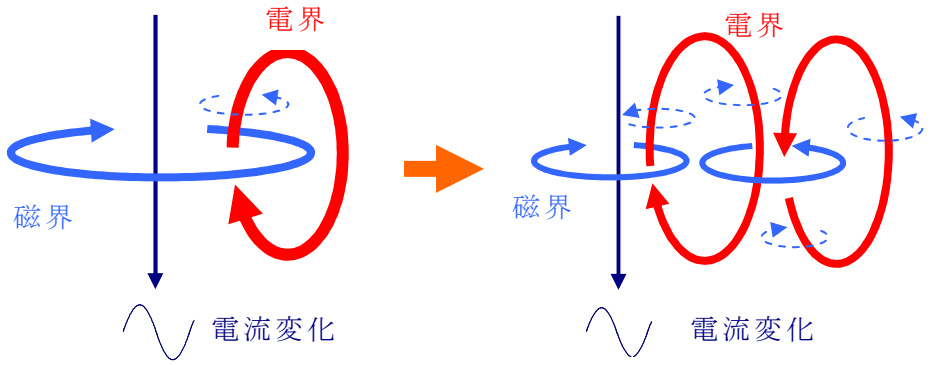


図 1.29　交流の磁界と電界

このように電流の向きが変わるたびに電界の環と磁界の環が次々と出てきます。

こうして、図 1.29 の右図のように、次から次へと、電界の変化が磁界を生み、磁界の変化が次の電界を生み、この電界の変化がさらに次の磁界を生む、という具合にして、空間に、電界、磁界の変化が広がります。

こうしてできる波動を電磁波といいます。

③ 交流回路の電線の中ではこんなことが起きる。

電線を流れる電流は、直流の場合には、電線材料がもつ自由電子の多少と導体断面と長さの比が、電流を流れの善し悪しとなる抵抗を示しますが、時間的に変化する電流（交流）を電線に流すときは、常に、電流変化に対して、ファラディ・レンツ則の逆向き起電力が作用して、増加する場合は、増加を抑制する向きの電位、減少する場合は変化前の磁力線数を補填するような電位が発生します。

この原因は、電子のスピン挙動であるのです。この力により、常に、電線を流れる電流変化に対して、敏感に逆向きの磁力線を発生して、発生した電流が現すアンペールの右ネジの磁力線がＮに対してＮ、Ｓに対してＳと対抗して打ち消すため、交流回路に流れる電流は、$k \cdot n \cdot \mathrm{I} = \Phi$ の関係から抑制されるのです。

この現象は、交流回路だけにしか現れないので、交流抵抗といわれるもので、テスターでは計測できない抵抗なのです。

この交流抵抗は、交流電流の変化の大きさに比例して増加や減少をしますので、周波数（1 秒間のサイクル数）がどんどん増えていくと、電線の中心ほど磁力線が密となって強いため、逆向きの起電力も大きいので電位の差がなくなるので交流抵抗は増大し、遂に、磁力線が粗な表面を流れようとするのです。

これを表皮効果といいます。電流変化が更に大きくなると先に説明したように、もはや電線を媒体として送られていたエネルギも電線から離

れ、磁力線と電界の対で、回収不可能な無限の空間に電磁波として飛び去って行くのです。結局、交流抵抗は、断面と長さの比であった直流抵抗に比べ、電線の表面の大きさに意味があって、その中身は中空でも良くなるのです。交流を流す電気回路は、材料の特性と断面積と長さの比で決まる直流抵抗に交流抵抗を加えたものです。

交流抵抗の発生メカニズムを図 1.30 に示しました。

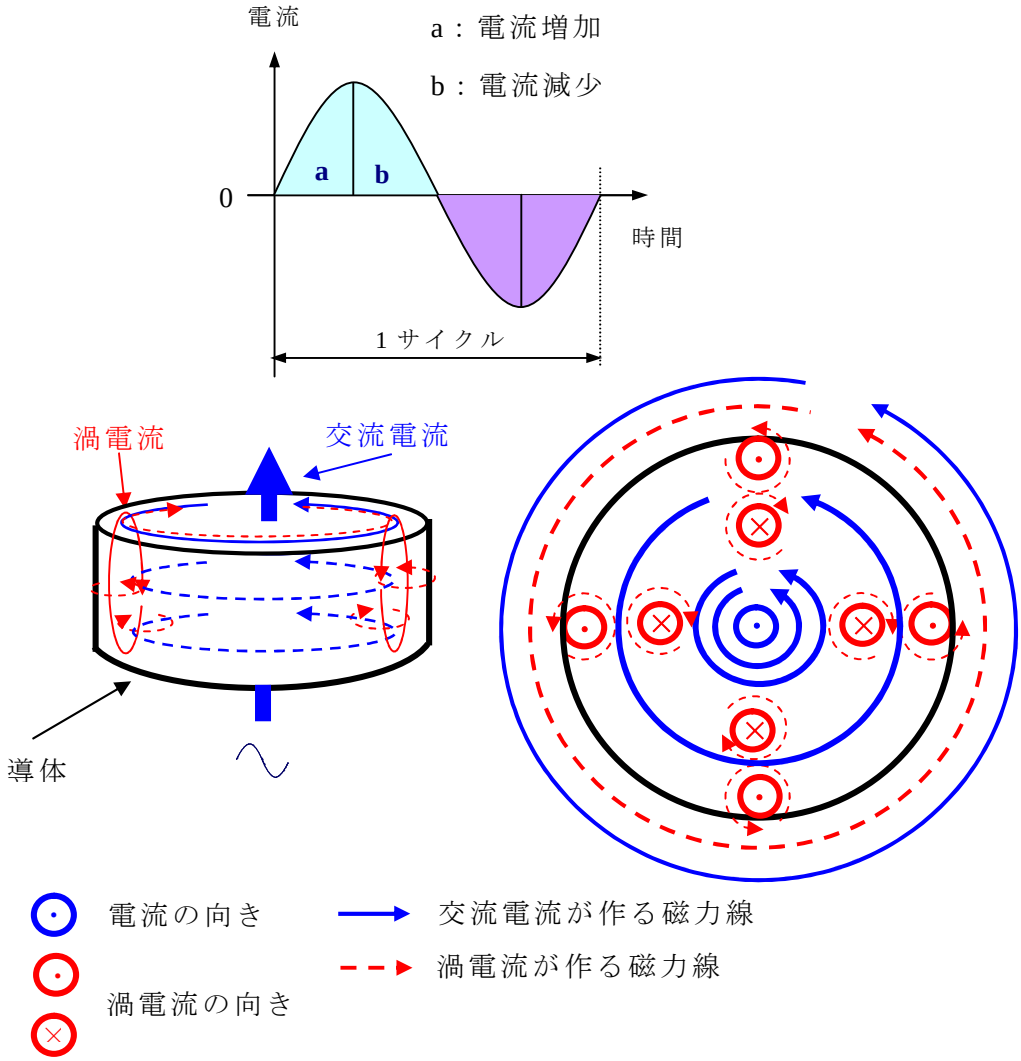


図 1.30　交流抵抗の発生メカニズム

導体に時間的に大きさが変化する交流電流が流れると、ファラディ・レンツの法則によって、逆向きの起電力が発生し、渦電流が流れます。

渦電流によって発生した磁力線は導体を流れる交流電流が作る磁力線を打ち消して、電線の外側の表面では磁力線を増加させます。

このような現象は、この章で取り上げた電子の挙動、即ち、電子スピンが果たす役割なのです。

いままで説明してきた電子のふる舞いは、実は量子力学という学問分野で研究されてきたものです。

量子力学という学問の発達とともに、電子は一定の軌道を回り続けるのではなく熱や電界、磁界、そして光など外部からのエネルギを受けることによって、この軌道を飛び越えて自由電子となることが分かってきました。また、電界と磁界を組み合わせて電子の進む方向に力をかけることによって、電子を等速直線運動させることもできるので、電子の動きを自在に制御できることも分かったのです。

注１．原子は構造的な概念であるのに対して、元素は特性の違いを示す概念です。

注２．ホールやイオンのように、電気的に中性でない物体の移動も該当します。特に半導体においては、伝導電子だけに注目して単に「電子」と表現することが多いが、半導体素子において、「電子が欠乏」といっても、原子核だけになっているわけではなく、電子がいなくなってe^+の抜け殻があるのです。

注３．冷却液として使用される液体窒素の沸点 77K（ケルビン：絶対 0 度－273.15℃）より高い温度で超伝導になるものを高温超伝導という。

注４．量子数とは、量子力学において、ある量子状態を指定する数のこと。

先輩から一言！

私たちが確かな電気工事を行う際には自然界の仕組みを良く理解しこれに合理させようとする努力が必要です。

特に、電気は、仕事としても興味の多い分野と思います。

諸君が、興味が趣味に変わり、技術的にも豊かな技量を備える一人前の技術者に成長して戴き、日々の仕事が技術的にも品質が良く、安全で、お客様に喜んで戴ける事業へと繋がれば、先輩としては、これほど嬉しいことはありません。

しかし、如何せん仕事をしながら新しいことを習得しようとするのは、並大抵のことではありませんので、短時間で効率良く、目的を持って、学習を進めることを心掛けてください。

独学で電気を学ぶときに電気って何だろう、なぜこんなことになるのだろうと考えることがあるかと思いますが、このようなとき、初学者向きに丁寧に解説された書物は案外少なく、疑問を解決しないで通り過ぎたこともあったとおもいます。

本書は、このような問題を解決しようと物性から説明する初学者向きの入門書を目指しております。

第 1 章では、「物性から電気の始原とは何か」を学習し物性こそが電気を知る大きな源泉であることを学習して戴きたいとおもいます。

この章は、電気って美しい世界のできごとをベースに図絵と説明によって解説をしています。大いに興味を持って学習して下さい。

第２章　電気とはどういうものか

１．電子のふる舞いが電気なのです

第１章では、主に物性面から電気は何かと問いかけ、電気の始原が電子の挙動であることを説明しました。この章では、さらに電子がもつ不思議な力や性質を織り交ぜ、電磁気学に沿いながら電気現象を考えて行きたいと思います。

私たちの周りに存在する物質は、様々な原子が組み合わされてできています。

原子は原子核と電子から成り立っていて、また、原子核には陽子と中性子から構成されていることが分かりました。

これらの電子、陽子及び中性子は、素粒子と呼ばれているもので、中性子は、電気的な性質はもちませんが、陽子はプラスの電気をもち、電子はマイナスの電気をもつとされています。原子核と電子の関係を図 2.1 に示しました。

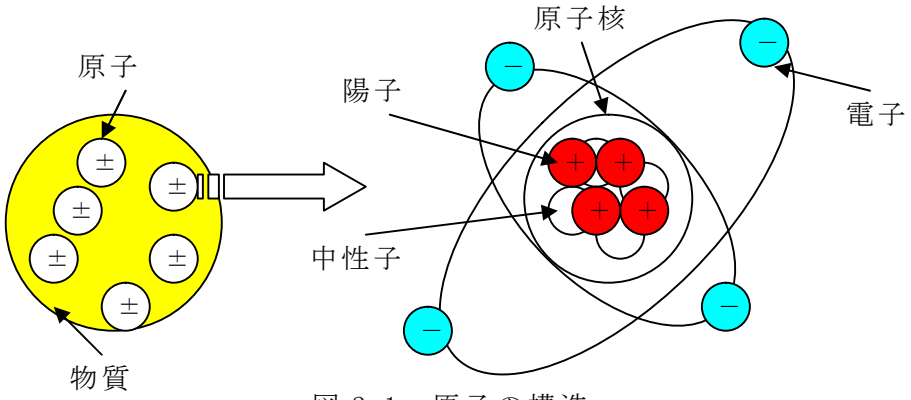


図 2.1　原子の構造

通常は、原子の陽子と電子の数が同じで、お互いに打ち消しあっていますので、電気的に中性でバランスが取れており電気は現れていません。

ところが、いちばん外側を回っている電子は、原子核から離れているため内側の電子に比べて原子核との結びつきが弱く、外部からの力（電圧、摩擦、磁力線など）によって、原子核から離れて原子間を自由に行き来することができるのです。

このように原子核に束縛されていない電子を自由電子といいます。この自由電子のふる舞いによって、電気が現れてくるのです。

２．電気はどのようにしてつくられるか

電気の発生に前述したように電子の動きがキーポイントになります。

二つの物体が触れ合ったり、こすれ合ったりすると、安定の弱い片方の自由電子が飛び出し、もう片方の原子に移動します。

そうすると、図 2.2 に示すように、陽子と電子の数のバランスが崩れ、

電子が飛び出した方の物体は、陽子の数が電子の数より増えてプラスの電気を帯び、電子を取込んだ物体は、電子の数が陽子の数より増えるためマイナスの電気を帯びることとなります。電子が飛び移り帯電したとき片方の物質は、電荷が帯電したといいます。

電荷とは、第１章で説明したように、エネルギをもった電子（飛び移った電子のこと）をいい、電荷が帯電した物質は電気量をもったということなのです。

一般に電荷は *quntity of electricity* から Q、次元は *coulomb* から C と表現されています。

１〔C〕とは、国際単位系の組み立て単位と決められていて、意味は１アンペアの電流が１秒間に運ぶ電気量で、運ぶ電荷は次のように数量化されています。

電子（e^-）１個がもっている電荷は約1.6×10^{-19}とされていますから、１Q とは、$\dfrac{1}{1.6\times10^{-19}}$個の電子からなるので、指数を整理すると$6.25\times10^{18}$個の電子が移動したときの電気量が１Q〔C〕となるわけです。マイナスの数式を見たとき、ちっちゃな数だなと思ったかもしれませんが、数量にすると6.25×10^{18}個といった多くの電子が移動することなのです。

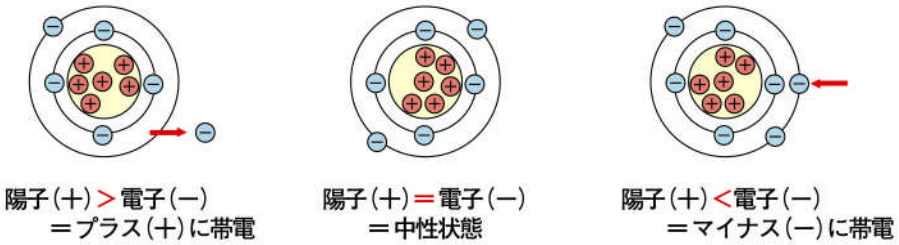


図 2.2　原子の構造と移動による帯電の仕組み

３．静電気

電子が電荷の移動であることがお分かりいただいたところで、今度は動く電気と動かない電気を学習します。ここでは、動かない電気を静電気、動く電気を動電気と区別して説明します。この動くとか動かないということを電子（電荷）の挙動といいます。

静電気とは、物体から飛び移った電荷（電子）が溜まっている状態をいいます。通常、静電気が生じている状態ともいいます。

第１章でも説明しましたが、冬場にドアを開けたとき、あるいは車から降りるときなどにバチッと感じて痛い思いをした経験があると思いますが、このバチッとくる現象は人体と衣服にそれぞれ摩擦して物質から飛び出した電荷が電位を作り、部分的に高電位を形成しているのが、安定な状態（相対的に平衡な電位）になろうと電位の低い方に溜まっていた電荷が移動する現象なのです。

ここで注意しなければならないのは、上の説明は電荷の場合です。電子を考えると、電位の高い方に引きつけられるというのが正しく、電子の移動は、あくまでも「低い方から高い方へ移動」するのです。

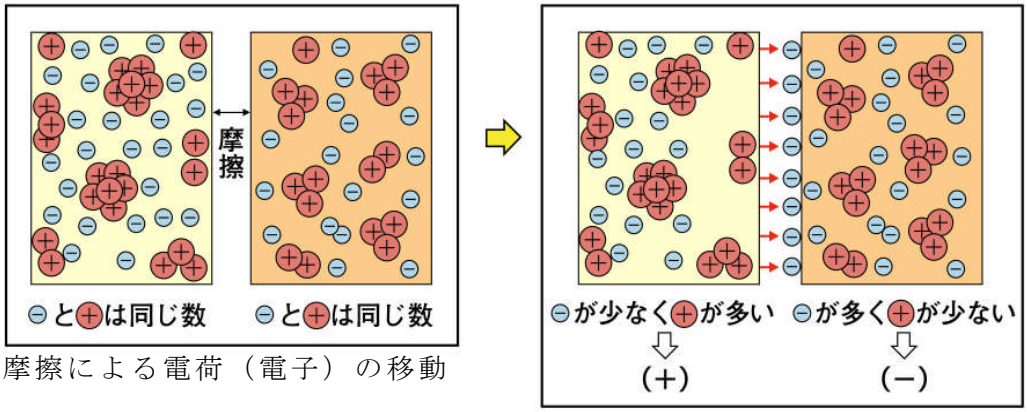
本当にそうなのでしょうか。雷で説明すると、電荷で考えるのか電子で考えるのか、ではなく、実は、原子に溜まっている電荷（電子）の状態が（＋）なのか（－）なのかによるのです。雷雲は、上空で不純物を蓄えた沢山の水からできていて、電子の空乏状態の原子の状態も静電気というのです。

静電気のお話に戻りますが、電気的に中性であるプラスチック棒と毛皮を激しくこすり合わせた場合を考えます。なにもしないで接触しても二つの材料を構成する原子が中性の状態にあって、それぞれが、電位を示さないときは電子の移動は起きません。電子を移動させるときには、何らかの外部エネルギが必要なのです。

ここでは、こすることは、運動エネルギを双方の材料に与えることになり、このエネルギが熱エネルギに変換され、物質を構成する原子を膨張（原子間距離を増加）させ、原子核引力からの拘束力から解き放たれて図 2.3 に示すように、自由電子が飛び出し、片方の物質原子に飛び移る現象なのです。

もちろん、この場合、皮を形成している原子の自由電子は、温度が上昇すると自由に飛び回りやすい性質があり、片方の毛皮の電子のほうがプラスチック棒の電子よりも原子核の拘束がゆるいことにもよるのです。このため、毛皮の電子はもぎ取られてプラスチック棒に移動し、毛皮は電子が不足して全体としてプラスに帯電し、プラスチック棒は毛皮から飛び込んできた電子が過剰となるため、マイナスに帯電するのです。この状態は、いずれも物質としてはエネルギが溜まった状態なので不安定な状態です。

したがって、自身が帯びている静電気の状態を脱出するために、電位が異なる物質と接触したとき、一気に放出して元の安定した状態になるのです。毎年、雷で被害を受けられたニュースが流れますが、雷も静電気の状態を安定にしようとする現象なのです。



摩擦による電荷（電子）の移動

図 2.3　摩擦による電荷の移動

（１）静電気の（＋）と（－）はこういう意味なのです

1733 年、フランスのデュフェイが、電気には２種類の電気があり、ガラス棒を絹布で摩擦して起こる電気（ガラス電気）と琥珀（又は樹脂）を毛皮で摩擦して起こる電気（樹脂電気）は異種の電気であって、同種の電気は反発し合い、異種の電気は引きあうという説を発表しました。

後に、アメリカのフランクリンが、ガラス電気は正の電気（陽電気）、樹脂電気を負の電気（陰電気）と呼び、正の電気をプラス、負の電気をマイナスとしたのです。

静電気のプラスとは、自由電子が飛び出して原子の電子が空乏の状態（元々あるべき電子がなくなった）になった状態をいい、マイナスとは自由電子が飛び込んできて原子の電子が過剰になった状態をいいます。

（２）静電気にはものによって序列があります

摩擦によって物質に発生する電気は、摩擦する物質の種類によって異なり、摩擦する物質によって（＋）の電気を帯びたり、（－）の電気を帯びたりすることが分かりましたが、図 2.4 は、物がもっている電荷を取り込む特徴順に数直線上に配列しました。これを静電の序列といいますが、左側の方をプラス（＋）の電気、右側の方をマイナス（－）の電気に帯電する特徴順に示しています。静電序列は、序列の離れたものどうしで擦るとより大きな電荷を溜め込むということなのです。

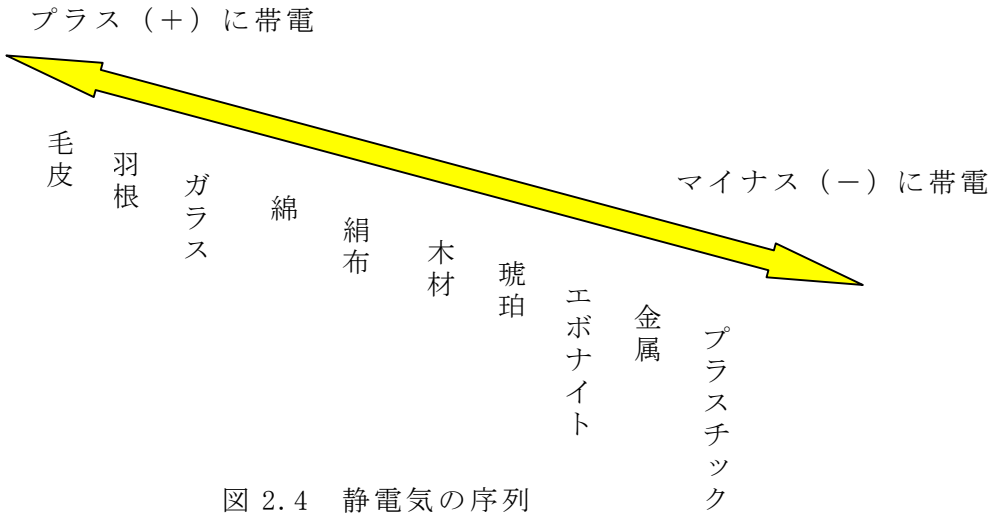


図 2.4　静電気の序列

４．動電気

動電気とは、実際に電気を使って電灯をつけたり、モータを回転させたりしていろいろな補機を動かす動力を生み､仕事をさせる電気をいいます。動電気という呼び方は、静電気に対して動電気といいますが、普通は動を外して、単に電気と呼んでいます。

さて、電気が物体上に留まっていても何も起こりません。物性的にいうと電子が移動しなければなにも起こらないのです。

仕事を生むための電気とは、その始原たる（電子）が流れないとお話にならないのです。このように電気回路を流れる電流を動電気といって、私達は静電気と区別しているのです。では、電気の流れとは一体どんなものなのでしょうか。

電気が流れるのは、物質中の原子の自由電子が電位を受けて移動することなのです。

電位の高い、低いということは、動電気でも同じことなのです。

鉄やアルミニウム、銅などのほとんどの金属は、電気や熱をよく通す導体と呼ばれる物質です。この導体の内部には膨大な数の原子がありますが、一つ一つの原子に束縛されていない自由電子を多くもっていて、この自由電子が動いて電気を運ぶのです。

図 2.5 のように正の電気を帯びた物体Ａと負の電気を帯びた物体Ｂを導体で結んでみます。すると導体中のマイナスをもった自由電子がプラスの電気を帯びた物体Ａに引き寄せられて物体Ａに入り、プラスの電荷と結びつくため、導体中の自由電子が不足し、マイナスの電気を帯びた物体Ｂから電子が供給され、導体中の電子が移動することで電気が流れるのです。

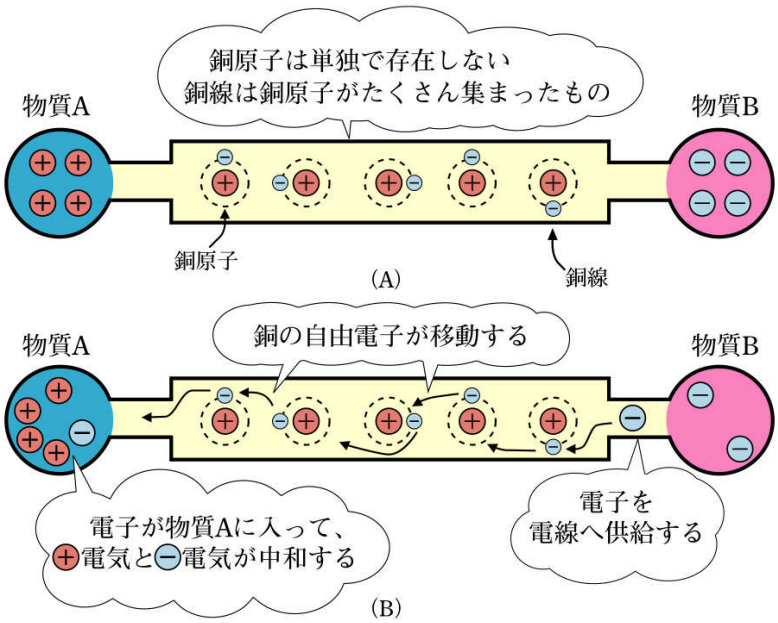


図 2.5　電子の移動

ここで物性的に見ると、自由電子が移動するといいましたが、この自由電子は、誰が供給しているのでしょうか。静電気では、電荷（電子）が移動できるのは運動エネルギを与えて作り出した熱エネルギによって他の物質に飛び移るといいましたが、この場合の電子の収支は、片側の物質から移動したものでした。

エネルギが取り除かれたとき、相対的に電位の低いものと接触して放出して電位の収支を合わせますが、さて動電気は何から供給を受けるのでしょうか。

第１章で、自由電子は、物質を構成する原始の粒子と説明をしましたが、自由電子はだれが供給しているのでしょうか。

電線（銅線）の自由電子なのでしょうか。それとも起電力を作る発電機の銅線の自由電子なのでしょうか。

疑問は深まりますが、その答えは動電気を考えるときは、必ず電子が循環する電気回路を考えるのです。つまり動電気は、静電気の場合が、電荷が他の物質に飛び移り飛び移った電子は元には戻ってきませんでしたが、動電気の場合は自由電子を沢山もった導体が閉じた回路（閉回路）を形成していて、発電機で発生した起電力（電子を動かそうとする力）によって高い電位が作られるため、低い電位との差（電位差）が電子を動かす力として、導体（電線や電動機、発電機、スイッチなど電気を通じる全ての回路部品をいいます。）の自由電子を回路の中で循環させているのです。したがって、電子がなくなり電線など導体が消えてしまうことはないのです。

（１）動電気の（＋）と（－）はこういう意味だ

動電気とは、動いている電気と説明しましたが、電気の動きの中でのプラス（＋）、マイナス（－）とはどのようなことでしょうか。

実は、電気の動きでいっている（＋）や（－）は、長さや重量といった物理量を示すものではないのです。電気の流れとは、電子が移動することと説明しましたが、このマイナスの電気をもった電子の移動の向きを示すための、いわゆる符号と考えてください。後の章で詳しく説明しますが、電気の流れ（電流）は電位の高い方から低い方に移動していきますが、この電位の高い方を（＋）、低い方を（－）として（＋）から（－）の方向に移動していきます。（これも後ほどの説明で出てきますが、マイナスの電気をもっている電子の動きは当然ながら（＋）の方向に引き寄せられるため、（－）から（＋）の方向に移動しており、電流の流れの向きとは逆になっています。）この電気の動きの中での（＋）と（－）は、温度の基準点０〔℃〕や、標高の基準点の海抜 ０〔ｍ〕からの絶対値として（＋）と（－）が決められているようなものではなく、相対的に電位が高くなる方を（＋）、低くなる方を（－）としているのです。図 2.6 の山登りにたとえるなら、中間地点の高さまで上ってきた人の自分の位置より上方（これから上っていく上の方向）が（＋）で、下方（今まで上ってきた下の方向）が（－）になります。

図 2.6　動電気の（＋）と（－）

（２）電流は、水のように高い電位から低い電位の方に流れます

電流はどのように流れるのでしょうか。図 2.7 をご覧ください。

ご存知のように、水は高いところから低いところに流れていきます。同じ高さの場合は、ポンプなどで無理やりに流れを作らない限り水は流れないのです。

電気もこれと同じように高いところから低いところに流れるのです。

ただ、水の場合の高い、低いは、位置関係（もしくは水位）の高低ですが、電気の場合は電位の高低又は電位差になるのです。この電位差のことを一般には電圧といいます。

このような関係からプラス側（電子が少なくなっている側）の電位が高く、マイナス側（電子が多く存在している側の方が電位）が低いと定義できるのです。

これは、あくまで電位がプラスの電荷に対して定義されているのです。したがって、電気の流れである電流は、図 2.8 に示すように電位の高いプラス側からマイナス側に流れるとされるのです。

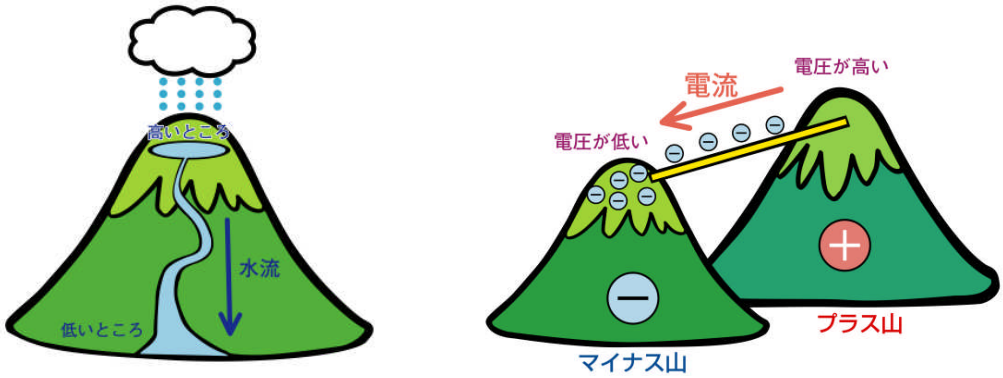


図 2.7　電位の高低

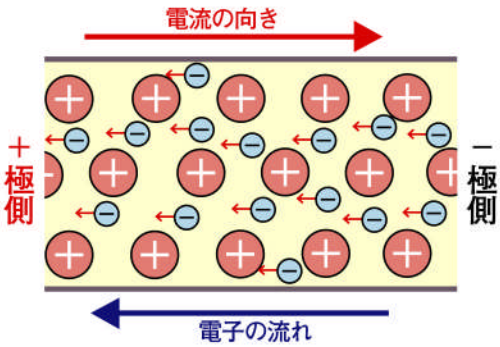


図 2.8　電流の向きと電子の流れ

（３）動電気は自由電子が動くことだ

動電気とは、電気が動くこと、いわゆる自由電子が動くことだと説明してきましたが、実際にはどのように動いているのでしょうか。

図 2.9 をご覧ください。導体のように電気をよく通す物質の中には多くの自由電子が存在し、自由に動き回っています。そこに電圧をかけると自由電子はいっせいに（＋）の方向に動いていきます。

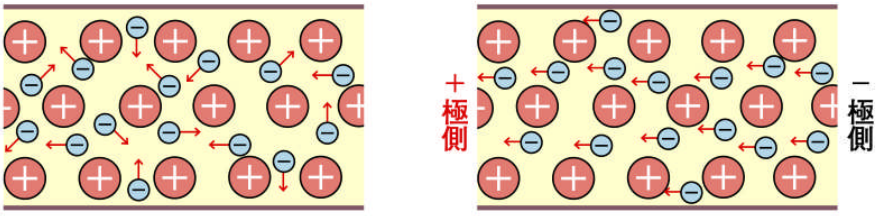


図 2.9　電気の流れ

このように自由電子が動くことによって、電気が運ばれていくのです。電流の方向は、自由電子の動きとは逆向きですが、これは電気の研究が進んでいく過程で、自由電子の流れが電流であるということが後になって分かったためだからです。これまで電気の研究は、電流は（＋）から（－）に流れるとして数多くの法則や現象を説明していたため、それまでの習慣通り（＋）の電荷の流れとして電流は（＋）から（－）に流れるとして表現しているのです。実際は、これまで学習したように電子のふる舞い（移動）が電気なのです。次は、電気の流れの速さを考えます。

電気の速度は、30 万〔ｋｍ／秒〕（3×10^{8}〔$\frac{m}{\sec}$〕）です。そのため電気のスイッチを入れて電気が流れ出すとすぐに電灯がついたり、モータが回ったりします。

しかしながら、この速度は電気の本性である電子そのものが、この速度で導体中を移動しているわけではないのです。実際の電子の速度は、蟻（アリ）よりも遅く、0.1〔ｍｍ／秒〕程度です。では、なぜ電気はこのように早いというのでしょう。

この原因は、導体中にある数多くの電子が玉突き状態で次々に伝わり、その速度が 30 万〔ｋｍ／秒〕になるからです。

図 2.10 は、電子 A が、導体に飛び込むと、導体の中の電子 B の電子に玉突きし、あたかも電子 A が導体中を移動したかのように電子 B が飛び出します。

この電子 A が導体にぶつかり、電子 B が飛び出すまでの速度を電気の速度といっているわけです。

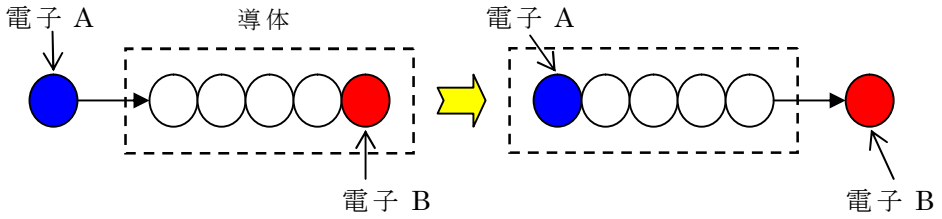


図 2.10　電子の動き

（４）電子の動きを妨げるのは抵抗なのです

パイプに水を流すとき、パイプの断面形状や長さ、内面の粗さなどの形状によって流れはさまざまに妨げられ、水の流れは変えられます。このように、水の流れを変える性質をパイプの抵抗といいます。

電気の場合も同様に、導体には電流の流れを妨げる性質があります。この水の流れを妨げるパイプの抵抗と同様に、電気的な抵抗と考え、電気抵抗あるいは単に抵抗と呼んで、一般にＲ（レジスタンス）の記号で表します。その単位は、オーム（単位記号〔Ω〕）を用います。

前にも述べたように、電流は自由電子の移動によりますが、電流が流れる導体には、自由電子のみが存在しているわけではなく、導体を構成する原子が存在しているのです。

そのため、自由電子が導体中を移動するときには原子と衝突しながら移動することになり、運動エネルギを消費しますので、その移動は妨げられて、速度が低下しますが、これが電気抵抗なのです。抵抗の大きさは、次の要素によって変わります。

①　材質の種類（どんな物質であるか）
②　形状（長さ、断面）
③　導体の周囲の温度（高低）

いま導体の抵抗をＲ〔Ω〕、長さをＬ〔ｍ〕、断面積をＡ〔m^2〕、抵抗率を（ρ：材質の種類による）としますと、次の関係式が成り立ちます。

$$R = \rho \cdot \frac{L}{A} \quad 〔\Omega〕$$

導体の抵抗体は、材質によって違いがあり、同じ材質の場合でも長さＬに比例し、断面Ａに反比例し、丁度、水のホースにたとえることができます。この抵抗の大きさは、導体の両端に１ボルト〔V〕の電圧を加えたときに１アンペア〔A〕の電流が流れるとき、１オーム〔Ω〕である、と国際単位系の組み立て単位として使われています。次の式は、オームの法則（*ohm's law*）です。

$$I = \frac{V}{R} \quad 〔A〕$$

（５）電子の移動を妨げる目安が電圧降下です

電気をよく通す導体（金属など）といえども、その抵抗はゼロではありません。唯一の例外（抵抗がゼロになるもの）は、第１章でお話した極低温状態に置かれた超電導という物質です。）導体に電気を流すと、その抵抗により導体の両端に電位差（電圧）が生じます。これを電圧降下といい、電気の動き、いいかえると電子の動きを妨げる目安になります。

（６）電流の大きさ、電荷（電気を帯びた電子）の大きさ

電流の大きさは、毎秒当りに移動する電荷の量です。

電流は、電荷Q〔C〕が微少に移動するとき電流が流れるということでしたから、図 2.11 に示すように、電荷Q〔C〕の微少移動と、流れる電流に時間を乗じた「数」は、それぞれ等式として置くことができます。

$\Delta Q = I \cdot \Delta t$ （〔C〕 ＝ 〔A〕〔sec〕

この式は、電流の式に書きなおすと、ある断面積を単位時間に通過する電荷の量が電流の大きさになり、$\frac{\Delta Q}{\Delta t}$は、時間当たりの電荷の移動量になるのです。

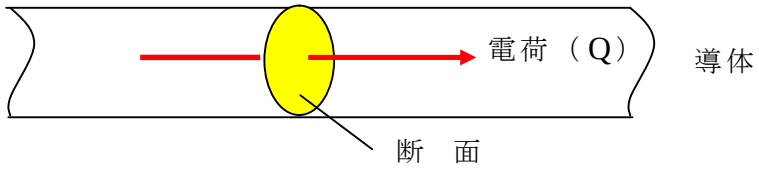


図 2.11　電流の大きさ

先輩から一言！

第 2 章は、原子のなり立ちから静電気と動電気そして電気が流れる仕組みを主に物性面から説明をしました。

電気エネルギを持つ電荷が、単位時間に移動することが電気の流れということでしたが、電荷の移動には電位差があることが条件でした。

一方では電荷の移動を阻害しようと働く電気抵抗の存在があり、導体長と断面の大きさの比、そして材質の性質によって、その数値が変化することを学びました。

電気抵抗の発生メカニズムは、電気工事をする上でとっても大切ですから、その仕組みについては理解し覚えておく必要がありますので、しっかり勉強して下さい。

第３章　電気回路

１．電気回路とは、どんなもの

電気を通じると導体内部の自由電子を循環させて必要な機器に電気を送ることができます。このように電荷を帯びた自由電子を循環させる系を電気回路といいます。

電気は、電源から負荷そして電源に戻る閉じた系を作ることによって、初めて負荷に仕事をさせる電荷を運ぶことができるようになります。

電気回路の中を循環し、仕事をする自由電子たる電荷は、発電機の起電力を受けている間、電位の高い電源から電位の低い負荷側に絶え間なく移動し、負荷の仕事に費やされ、そののちには電源に戻る循環をしますが、この間、電力として費やされるのは、電子が帯びた電荷であり、自由電子自体は減ったり、なくなったりはしません。

この章では、電気回路というものを考え、電荷の移動を妨げる抵抗と抵抗の接続方法によって変化する電位や電流を学習します。

これまで、物性から電気を説明してきましたが、回路をなす導体自身が多くの自由電子を保つので、電子から見た電気回路は、高い電位に自由電子が引き寄せられて系の回路内を循環すると考えるのです。電荷をもった電子は、電位の大きさに応じて導体原子の電子と玉突きしながら、系内を循環する仕組みですから、発電機から高電位が供給される間は、発電機、電線、負荷等といった材料がもつ自由電子と玉突きしながら循環するだけなので、エネルギの伝達速度は速いものの電子は非常にのろまなのです。

２．電気回路の特徴

電気回路は、電源と負荷、そしてスイッチから成り立ちます。図 3.1 に示すように電位の高いプラス（＋）から電位の低いマイナス（－）に至る閉じた系を電気回路といいます。

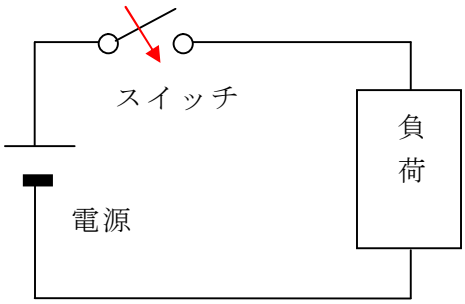


図 3.1　電気回路

図 3.1 の回路において、もし電源がなければ、電位を与えて自由電子を動かすことはできませんし、負荷がなければ、電気抵抗の極めて少ない電線だけになるので、電位の高い（＋）側から（－）側に短絡電流を供給する回路だけになるので、自由電子を動かして仕事をさせる道筋を作ることができないばかりか、大変危険な短絡回路になります。

このように、電気回路は、電源、導体、負荷、スイッチから構成され、自由電子の伝達経路を構成するものをいいます。

３．電気の流れ

電気の流れは、水の流れのように落差や分岐そして貯水池のように溜めることができるので、よく川の流れに例えられます。

電気が流れるしくみは、電位の高低差によって電荷が移動することによりますが、電荷を移動させる原動力には、電位、電位差、電圧、起電力と呼ばれる４つ種類の力があります。単位は全てボルトを使います。

電位は、ある量の電荷を帯びた電子が移動せずに１箇所に停留している状態を指します。電位差は、異なる量の電荷を帯びた電子の停留している状態間の電位の差を指しています。電位差は電気回路では電流を流す電圧になっています。

起電力は、この電位を連続的に作り出す源となるもので、電気回路では電源がこれにあたります。物性的にいうと、電位が現れているということは、電荷がある状態（電子が一箇所に留まっている状態）を指し、電位差があるということは、電気回路の２点間における電荷の大小の差で、電圧ともいいます。

この電圧は、電位の低い方から電位の高い方に電子を運ぶ圧力として働きます。

起電力は、連続的に電位を維持するもので、電気回路にとっては常に電位の差を供給し続けるエネルギ源になりますから、電圧 V〔V〕に対して、E〔V〕という記号が使われます。電気回路においては、電池や発電機が担います。

４．電気回路の抵抗

電荷が移動するとき、これを妨げようとするものがありますが、電気回路では、これを抵抗と呼んでいます。

この抵抗は、文字通り流れる電流を押し留めるので、電気回路にとっては厄介なものになります。

したがって、電気を通す導体として用いるときは極力抵抗が少ないことが必要で、逆に、電気を通さない絶縁として使用する場合は、漏電がないように大きな抵抗が必要になります。

抵抗の低い材料は、自由電子を多くもつ材料で、金、銀、銅、アルミニウム等がありますが、経済的な理由から導体には銅が多く用いられています。

抵抗は、その値から次のように区分されて使われています。

① 導体は、抵抗率が 10^{-6}〔Ω・m〕以下の材料としている。
この範囲の抵抗をもつ材料は、電気をよく通し、温度上昇とともに一般的に抵抗率が上昇する特徴をもっていますが、電気をよく通す意味

から導体として使われます。

② 半導体は、抵抗率が 10^{-5} から 10^{5} 〔Ω・m〕の範囲の材料
この範囲の材料は、温度上昇とともに一般的に抵抗率が低下する独特な特徴を示すものがあり、導体と同じように扱えないという意味から、半分が導体という語源で半導体と呼ばれています。集電器（ブラシ）に使われる炭素などがこの例です。

③ 絶縁体は、抵抗率が 10^{6} 〔Ω・m〕以上の材料としている。
非常に大きな抵抗なので、電気回路、電器機器及び電器設備の絶縁物として使われます。

５．簡単な直流の電気回路を使って説明します

電源に乾電池、負荷にまめ電球を使った簡単な回路を考えてみます。

図 3.2 は、等価回路で表した電気回路で、図 3.3 に実物を使って表した実体回路を書いています。

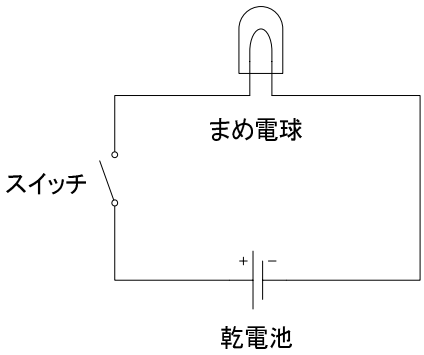


図 3.2　等価回路

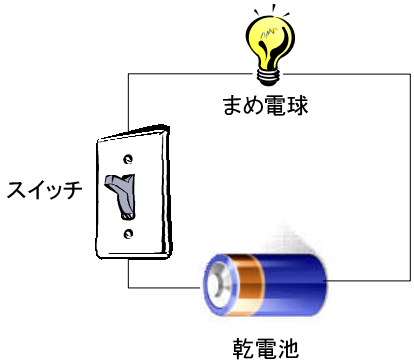


図 3.3　実体回路

実物に近い図 3.3 の方が分かりやすいですが、絵を書くには非常に手間がかかるため、電気回路図は、図 3.2 のように簡単に書く方法が考え出されました。

この回路図は、部品と等価という意味で等価回路と呼ばれています。特殊な場合を除いて、電気回路図は、図 3.2 に示すように電源を入れる前の状態で書かれています。

図 3.2 は、スイッチを入れる前の図で、図 3.3 は、スイッチを入れてまめ電球を点灯している回路を示していますが、スイッチを入れると乾電池の電位の高い（＋）側から（－）側に電流が流れ、豆電球の中のフィラメントを発熱させて光を出し、まめ電球を点灯させる図としているのです。

図 3.4 の乾電池を見て下さい。(＋)の記号があるのが電位の高い極で、その反対が（－）極です。

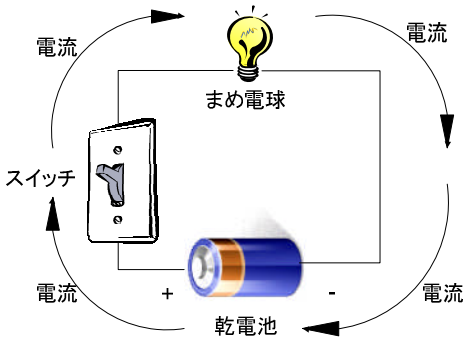


図 3.4

この回路は、電位差が 1.5〔V〕で、電位の高い（＋）側から電位の低い（－）側に電流が流れます。今度は、図 3.5 のように乾電池が 2 個ある場合を考えてみましょう。

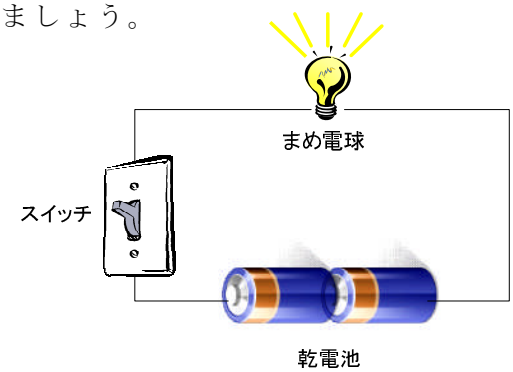


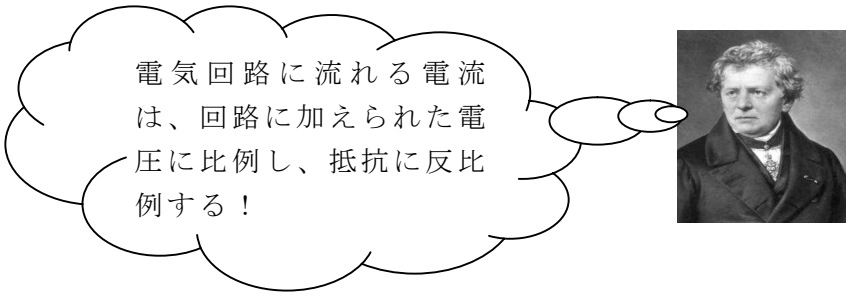
図 3.5

乾電池を 2 個接続することにより、まめ電球は明るく点灯するようになります。

乾電池の電圧は、1.5〔V〕×２個で２倍になり、乾電池の電圧が大きいほど回路に流れる電流を強くし、まめ電球を明るくすることができるのです。

６．オームの法則

オームの法則は、1827 年、ドイツ人の「ゲオルク・オーム」によって発表されました。研究成果を発表した時は、誰もその重要性に気付く人はいなかったそうです。



彼が発表した法則は、電気回路に流れる電流は、回路に加えられた電圧に比例し、抵抗に反比例する、というものでした。

この表現は少し難しいので、言い換えると、回路の電圧が高くなれば電流の強さは大きくなり、抵抗の値が大きくなれば、電流は小さくなる、というもので次の式で表わすものでした。

$I = \frac{V}{R}$〔A〕　I〔A〕、V〔V〕、R〔Ω〕を単位とします。

I は、Intensity of current（電流の強さ）

V は、Voltage（電圧）

R は、Resistance（抵抗）

のように、頭文字をとって記号化されています。

図 3.6 の回路は、乾電池にスイッチと抵抗が接続されたものです。この回路は､スイッチを入れると抵抗に電流が流れるだけの簡単な回路ですが、抵抗の両端にかかる電圧は、乾電池電圧の 1.5〔V〕です。

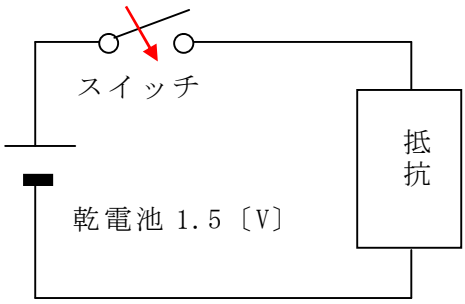


図 3.6　電気回路

抵抗が 1〔Ω〕のとき、スイッチをいれるとオームの法則から、

$I = \frac{V}{R} = \frac{1.5}{1} = 1.5$〔A〕

と求めることができます。

ここで抵抗値を半分の 0.5〔Ω〕にしたときは、

$I = \frac{V}{R} = \frac{1.5}{0.5} = 3.0$〔A〕になり、電流は 2 倍の 3〔A〕になります。

逆に、抵抗値を 2 倍の 2〔Ω〕にすると、

$I = \frac{V}{R} = \frac{1.5}{2} = 0.75$〔A〕になって、電流は半分の 0.75〔A〕になります。

このように電圧を一定として抵抗を小さくすれば、電流は大きくでき、逆に、抵抗を大きくすると電流は小さくなります。

これがオームの法則なのです。

前項では、乾電池を 1 個つないだ場合と、2 個つないだ場合のまめ電球の回路を考えましたが、これを使ってオームの法則を考えてみます。

乾電池の電圧を 1.5〔V〕、まめ電球の抵抗を 1〔Ω〕とすると、乾電池 1 個の場合に回路に流れる電流は 1.5〔A〕になります。

では、図 3.7 を図 3.8 のように乾電池 2 個接続したときはどのようになるでしょう。

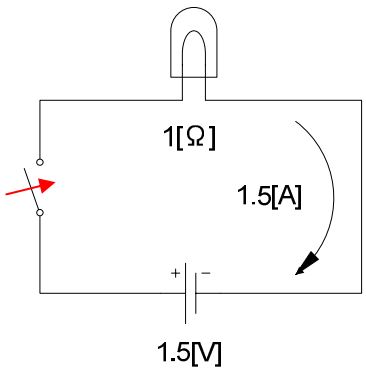


図 3.7

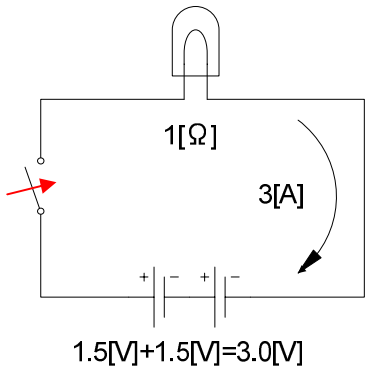


図 3.8

乾電池 2 個の電圧は、1.5〔V〕+1.5〔V〕=3.0〔V〕になるので、オームの法則に代入すると、$I=\frac{V}{R}=\frac{3.0}{1}=3.0$〔A〕になり、回路に流れる電流は 3〔A〕になります。

乾電池 1 個の場合は、流れる電流が 1.5〔A〕、乾電池 2 個直列接続の場合は倍の 3〔A〕になります。

次に、電源電圧は一定で、負荷が変わった場合について考えてみましょう。一般家庭の照明器具で考えてみます。

乾電池に替えて家庭で使っている交流 100〔V〕に、まめ電球に替えて普通の電球で考えます。図 3.9 と図 3.10 を比べて下さい。

電球を 60〔W〕から 100〔W〕に代えれば明るくなることは分かっていると思いますが、なぜ明るくなるのでしょうか。

電球が消費する電力 P〔W〕は消費する電流と電圧をかけ算したものになります。つまり、P〔W〕＝電流 I〔A〕×電圧 V〔v〕で表されます。

電圧を 100〔V〕とすると、60〔W〕の電球では、60〔W〕=X〔A〕×100〔V〕になり、電球に流れる電流 X は 0.6〔A〕となります。100W の電球では 100〔W〕=X〔A〕×100〔V〕から、X は 1〔A〕となり、より多くの電流が流れるために明るくなるのです。

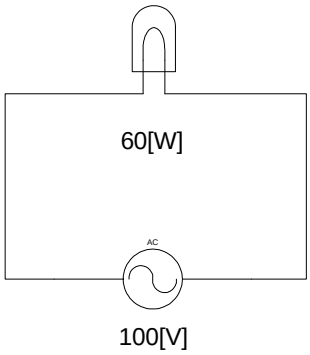


図 3.9

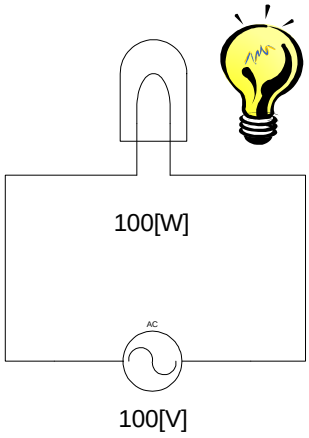


図 3.10

では、家庭の経済面から考えると電気代はどうなるのでしょうか。

電気代は、使った時間を積み上げた電力量ですから次式で表されます。

P〔W〕×h〔時間〕

今、使う時間が同じで、60〔W〕の電球から 100〔W〕の電球に替えたときはどのようになるでしょうか。

60〔W〕より明るい 100〔W〕の電球は、電流を多く使う分、電気代も高くなるわけですが、電力が大きくなった場合の抵抗の大きさはどうなるのでしょうか。

電気代が余計にかかるのは抵抗が大きくなっているからでしょうか。これをオームの法則を使って調べてみます。

先に述べたように、100〔V〕の電源に 60〔W〕の電球をつなぐと 0.6〔A〕の電流が流れました、また 100〔W〕の電球の場合は 1〔A〕の電流が流れました。

オームの法則に、100〔V〕と 0.6〔A〕を代入すると 60〔W〕の電球の抵抗を R_{60} とすると、その大きさは

$R_{60} = \frac{V}{I} = \frac{100}{0.6} \approx 167$　となり抵抗 167〔Ω〕が求まります。

同じように、100〔W〕の電球の場合の抵抗を R_{100} とすると

$R_{100} = \frac{V}{I} = \frac{100}{1} = 100$　となり、抵抗は 100〔Ω〕となりました

60〔W〕の電球よりも 100〔W〕の電球の方が、抵抗が小さくなったではありませんか。これは、抵抗が小さければ電流を多く流し、電球を明るくしたためです。

７．直列接続と並列接続

負荷を接続する方法には、直列接続と並列接続があります。

抵抗を負荷にして、直列接続と並列接続はどんな性質があるのか考えてみましょう。

図 3.11 には 2 つの抵抗 R_1〔Ω〕と R_2〔Ω〕の抵抗がつながっています。この図のように直線上に 2 つ以上並んだ接続を直列（*series*）接続といいます。

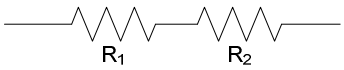


図 3.11

抵抗が 1 つの場合と 2 つ直列につなげた場合を比較してみましょう。

図 3.12 は、100〔V〕の電源に 5〔Ω〕の抵抗が接続された回路です。

回路に流れる電流はオームの法則により次のように計算できます。

$I = \frac{V}{R}$ により、$I = \frac{100}{5} = 20$〔A〕になります。

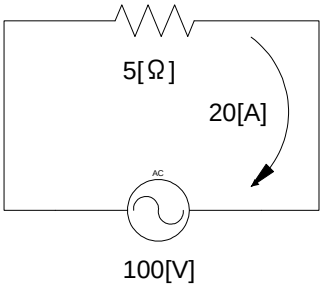


図 3.12

では、図 3.13 のように抵抗を 2 個直列につなぐとどうなるでしょう。直列接続の場合は、そのまま抵抗をたし算すれば、合計の抵抗が求まりますから、この場合は、抵抗 $R_1+R_2=5$〔Ω〕＋5〔Ω〕=10〔Ω〕となって、図 3.14 に示すように 5〔Ω〕の抵抗 2 個を 10〔Ω〕の抵抗を 1 つにしたものと同じになります。

回路に流れる電流は、オームの法則から $\frac{V}{R}=\frac{100}{10}$ なので 10〔A〕です。

一般式で表わすとオームの法則は、$I=\frac{V}{R_1+R_2}$〔A〕です。

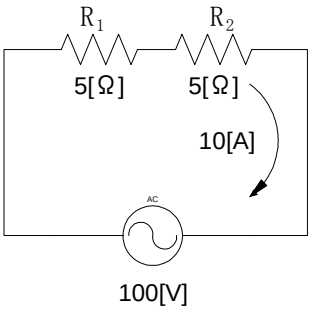


図 3.13

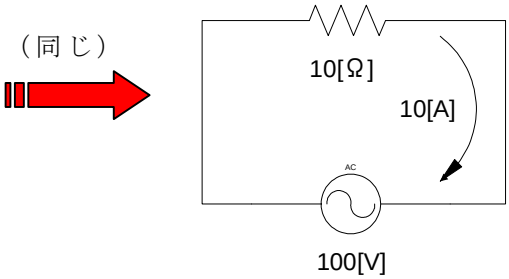


図 3.14

抵抗を直列に接続したときは、たし算で 1 つの抵抗にまとめることができます。

このようなことができるのは、直列に接続された抵抗のそれぞれに流れる電流が全て同じとして考えているため、たし算で合成できるということなのです。更に、5〔Ω〕の抵抗が 3 つになったとすると、

$I=\frac{V}{R_1+R_2+R_3}=\frac{100}{5+5+5}=\frac{100}{15}\approx 6.7$ 〔A〕の電流が流れ、直列接続ですから、それぞれの抵抗に 6.7〔A〕流れることになります。

次は、並列接続を考えてみましょう。

図 3.15 は、2 つの抵抗 R_1〔Ω〕と R_2〔Ω〕を並べて接続した回路です。このような接続を並列（*parallel*）接続といいます。

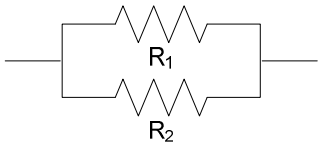


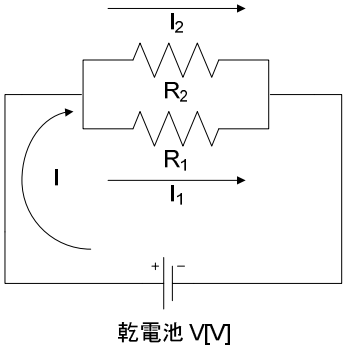
図 3.15

直列接続は、抵抗のたし算だったので簡単に求めることができましたが、並列接続の場合は少し複雑です。

直列接続では、電流の流れを押しとどめる力がたし算で増えていきましたが、並列接続では、流れを押しとどめようとする部品が横に並んで接続されます。ちょうど、同じ池に溜まっている水を流す経路を増やすことと同じになりますので、逆に、並べば並ぶほど、流れる水の量が増えるように、流れる電流が増えるといった接続方法になります。

私たちは、直列や並列接続された複雑な電気回路において電気部品に流れる電流や電圧の大きさを考えるとき、直列接続では電圧の平衡式を作って考えますが、これは回路に流れる電流を一定とし、抵抗により低下する電圧を未知数として扱います。一方、並列接続は、それぞれの抵抗に加わる電圧が一定としますから、未知数は、それぞれに流れる電流となるため、電流の平衡式作って考えると、並列数を増やせば増やすほど電気抵抗は減少することになります。しかし、抵抗のない状態を超えて電流は流せません。

ではこの関係を図 3.16 で考えてみましょう。



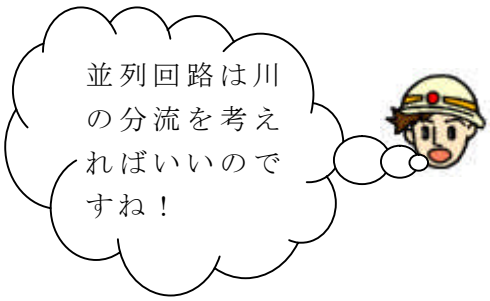


図 3.16

この回路は、乾電池と並列接続された抵抗だけの簡単な回路です。この回路に流れる電流 I〔A〕は、並列に接続された R_1〔Ω〕と R_2〔Ω〕に分かれて流れます。

R_1〔Ω〕に流れる電流を I_1〔A〕、R_2〔Ω〕に流れる電流を I_2〔A〕とします。

乾電池の電圧を V〔V〕とすると、オームの法則から、抵抗 R_1〔Ω〕に

流れる電流 I_1〔A〕は、$I_1 = \frac{V}{R_1}$〔A〕、抵抗 R_2〔Ω〕に流れる電流 I_2〔A〕は、$I_2 = \frac{V}{R_2}$〔A〕になります。

R_1〔Ω〕と R_2〔Ω〕の両端には、抵抗の大小に関わらず同一の電圧が作用しますから、式は、抵抗の大小によって流れる電流の大きさが変わることを意味しています。

並列接続では、電圧を一定として分岐して流れる電流の総和を求めるため、元の電流と分流した電流の平衡式を考える回路になるのです。

では、接続に戻って並列回路の電流の式を考えます。

図 3.16 の電流 I〔A〕は、$I=I_1+I_2$〔A〕で、I_1〔A〕と I_2〔A〕に分流します。

並列回路は分流しても分流路の電圧は一定ですから、回路に流れる電流は電圧をそれぞれの抵抗でわった電流式になります。

$$I = V \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \text{〔A〕}$$

左辺は、オームの法則 $I = \frac{V}{R}$〔A〕になりますから、これを上式に代入し、両辺が等しくなるように等式を作ってものが次式です。

$$\frac{V}{R} = V \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \text{〔A〕}$$

両辺に共通する V〔v〕を消去すると、次の抵抗式のみが残ります。

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

ここで、左辺の R を R_0〔Ω〕と置くと、R_0〔Ω〕は、次式のように整理できて、並列回路の合成抵抗を示す式ができあがります。

$$R_0 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

並列回路の合成抵抗は、直流回路とは大分式の様子が違いますね。

この計算結果を図 3.17 の等価回路に示しました。

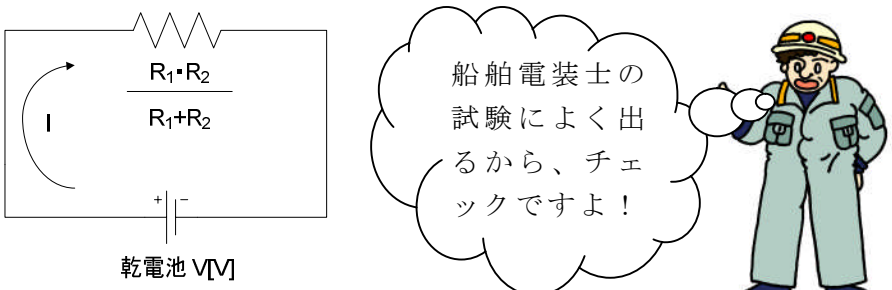


図 3.17

並列接続の回路に流れる電流は、分流電流の合成値で表されます。つまり分流が終わると、また合流して、元の電流 I〔A〕になります。

並列接続のそれぞれの分流路の電流は、オームの法則を使って抵抗の比で分配できます。並列接続に流れるそれぞれの電流を抵抗比例分配で求める方法は、付録の基礎数学で説明していますので参考にして下さい。

８．直並列回路の合成抵抗

抵抗に数値を入れて、直流の直並列回路の計算をやってみましょう。

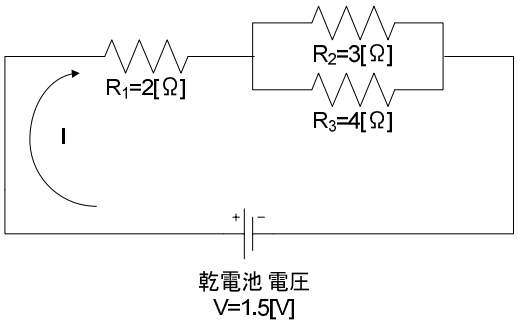


図 3.18

図 3.18 には、２〔Ω〕の抵抗 R_1 と並列に接続された３〔Ω〕の抵抗 R_2 と４〔Ω〕の抵抗 R_3 が直列に接続されています。

このとき、回路に流れる電流 I〔A〕の値を求めてみます。

計算の方法は、次の手順で式を整理して行くと間違いなく導くことができます。

【計算手順】

① 並列接続の R_2 と R_3 の合成抵抗 R_0 を求めます。
合成抵抗を求める方法は、3 項で説明した式を使います。

$$R_0 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{3 \times 4}{3 + 4} = \frac{12}{7} \text{〔Ω〕}$$

② R_1 と、R_0 をたし算し、図 3.20 のように回路に対して一つの抵抗にします。このようにすれば簡単に間違わずに計算ができます。

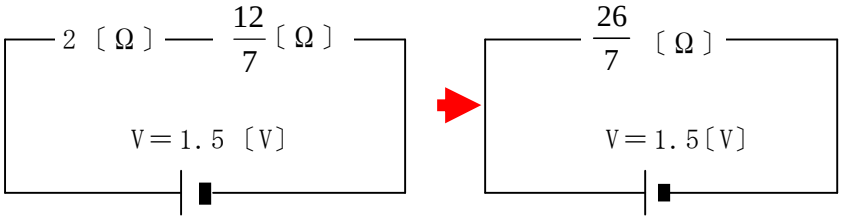


図 3.19　　図 3.20

$$R_1 + R_0 = 2 + \frac{12}{7} = \frac{14}{7} + \frac{12}{7} = \frac{14+12}{7} = \frac{26}{7}\ 〔\Omega〕$$

③　オームの法則を使って、蓄電池の電圧 V〔V〕を合成抵抗 R_0〔Ω〕でわり算して回路に流れる電流を求めたものが次式となります。

$$I = \frac{V}{R} \text{から、}\ I = \frac{1.5}{\frac{26}{7}} = \frac{7 \times 1.5}{26} = 0.4\ 〔A〕$$

9．直流回路の電源の接続

これまで抵抗負荷を題材にして電気回路を説明しましたが、次に蓄電池の接続方法と接続の意義を説明します。

(1) 蓄電池の直列接続

直列接続は、電池の個数×1 個分の起電力です。

放電時間は、蓄電池 1 個の時間になります。

この接続では起電力を増加するときの接続方法で、同一起電力しか接続できません。

(2) 蓄電池の並列接続

並列接続は、いくつも接続しても 1 個の起電力です。

放電時間は、蓄電池×個数の時間になります。

この接続方法は容量を増やすときの接続方法です。

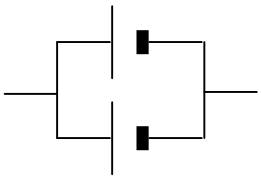
(3) 蓄電池の接続回路

①　直列接続

起電力：直列接続電池数

放電容量：電池 1 個分のＡｈ

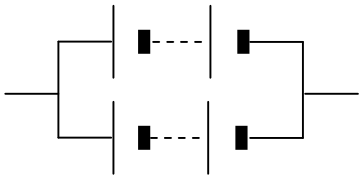
②　並列接続



起電力：電池 1 個分

放電容量：電池 1 個分の Ａｈ×並列個数

③　直並列接続



起電力：直列接続電池数

放電容量：電池 1 個分の Ａｈ×並列数

図 3.21　蓄電池の接続

整　理

電気回路は、導体抵抗を 0〔Ω〕と考えて、電源から負荷を経て電源に帰還する電流の流路をいいます。電気回路においてプラスとマイナス呼称は、電流の流れる方向をいい、電位の高い極をプラス、低い極をマイナスというのです。

蓄電池を接続するときの注意しなければならないのは（－）極は、0〔V〕だからといって、接続順序は間違わないようにしましょう。まず、接続するときは、(＋）極を接続してから（－）極を接続します。外すときは、(－）極を外してから（＋）極を外します。この手法は、電子の移動を抑制する物性的な考えによるものです。

先輩から一言！

第３章は、電気回路とはどのようなものかを学習しました。

電気回路は、必ず、閉じた系（ループ）であって、電位の高いところから低いところに電流が流れるように作ります。

電気回路は、導体（電線）だけでループを作っても電気は利用できません。この章では、電荷の移動エネルギを供給する源となる電源が必要であること、仕事をさせる負荷（電気機器）があること、そして、系には、必ず仕事をさせる電源開閉スイッチが必要であることを学びました。

電気回路に、負荷を接続しないで導体だけの回路にしたとき、抵抗の少ない電線だけに電源のプラスとマイナスを直接接続した場合、短絡回路ができあがり、大変大きな災害になりますね。負荷を接続するという意味は、安全面からも大変に重要なことなのです。

この章では、電気抵抗の接続の方法によって合成値が変わることを説明しました。

電気回路は、大まかにいうと負荷に仕事をさせる動力回路、システムを希望通りに動かす制御回路に分けられますが、いずれも電線を使って作る回路は無数にあり、どのように接続し、何をどのように動かせたいかが、決定されなければ電気回路は実現しないのです。

希望通りの回路にするためには縦横無尽に可能性のある接続方法の中から、最適な回路を選び、どんな使い方をしても安全な動作をする、フェールセーフな回路を造ることが必要です。また接続回路の調査でも同様で電気回路を理解する必要が出てきます。

初学者にとって電気回路図を読むことは大変難解とおもいますが、論理を作り上げる訓練をしながら、自分のものにして戴きたいと考えています。

本章の末尾に蓄電池の接続を説明しましたが、接続方法により発生する起電力と出力容量が変ることを覚えて下さい。

第４章　電流の熱作用

１．発熱のメカニズム

私たちは、ストローをくわえて空気を出すときは、普段、何気なく息をするときと同じで、あまり力を要しませんが、ストローの先にゴム風船をつけて膨らませるときには力を要します。

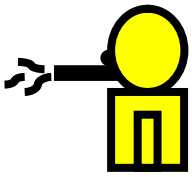


図 4.1

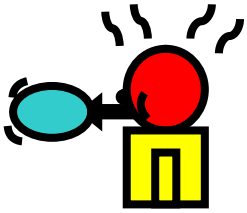


図 4.2

これはゴム風船の膨張力が人体に反力として作用するためですが、更に膨らまそうと息を吹き続けると、いつしか身体が熱くなってきます。

電気でも､同じように電流を流していないときは､発熱はないのですが、ひとたび電流を流すと、特殊な場合を除いて導体の多くは発熱します。

第１章で、電気の発生や導体に電流が流れる物性的なメカニズムを学習してきましたが、ここでは発熱や電気エネルギといったものを考えて行きます。

私たちが身近に接することができる代表的なエネルギには、運動、熱、位置などが頭に浮かびますが、物性的には質量が動くことによってエネルギがあるというのです。

電子はその運動を行うことによってエネルギを保有しているのです。

次は、電子が運動をすることによりエネルギを保有するという説明の式です。

$e = h \cdot \nu$ 〔eV〕（電子のエネルギはエレクトロン･ボルト）

この式で、ν（ニュー）は振動数、hはプランク定数です。この定数は、２０世紀初頭にプランクという人が発見した数で、今日でも基礎定数として使われています。

この数の大きさは次式となります。

$h = 6.62607 \times 10^{-34}$ 〔$j \cdot \sec$〕（ジュール秒）

電子を題材にして説明しても、ピンとこないと思われますが、実は電気のエネルギの始原は、この電子の運動なのです。このおはなしは、すでに物性面から説明していますが、ここでは電子の移動で発生する熱エネルギについて考えます。

電子が、抵抗のある導体を移動するとき熱を発生しますが、この現象は電子が図 4.2 の風船を膨らませるときの顔のようになるのではありません。

電子の運動をおさらいしてみると、電気の導体は、大方、原子の共有結合（電子どうしが互いに隣どうしの軌道に位置してスクラムを組んでいる

状態）によって形作られており、単一の元素ばかりではなく、他の元素も混じりあった物質で構成されています。このような原子間どうしの関係にあって、原子の最も外側に位置した軌道上の電子（自由電子）が、スピンしながら原子核の引力とのバランスを保って周回運動しているため、外部から磁界や電界、熱のエネルギや光エネルギを受けると、電子は、さらに運動エネルギを増して、激しく振動しますので、最早、原子核の力の束縛を振り切って、原子間を浮遊する電子に変わります。

この状態では、発熱現象を表しませんが、導体に一方向の電界を与えると、これまで勝手気ままに動いていた電子も、高い電位に向けて引かれて整然と動きだします。

もともと電子は、負で低い電位ですから、高い電位に引き寄せられて動き出すことは容易に想像ができるのです。

電子が移動（電流の流れ）しているとき、先に説明したように他の元素（不純物）や原子間どうしの衝突、あるいは、衝突で発生するフォノン（光）などによって、熱を発生するのです。これが電流の熱作用というものになっています。

したがって、電気エネルギの伝達は、電子の移動、即ち、電流が担うのです。

電子が、電位に引かれて移動するとき、その移動を阻害するのが電気抵抗と呼ばれるものです。

この抵抗は、導体の材質や形状によってその値は変化しますが、ともあれ電子の移動には障害が多いようです。

このような関係から、電気の伝搬が光速であるのに対して、電子のその移動には１秒間に、0.1〔mm〕位しか進まないと説明されています。

風船を膨らますときの仕事が、人体を熱くすると同じように電子も電荷を運ぶときに仕事をして熱を発生するのですから、なぜか人間っぽいではありませんか。

２．ジュールの法則

電流の熱作用はジュールが発見しその名が付けられました。

ジュールの発見は、抵抗に電流を流すと発熱するというもので、発熱量は次の式で説明されます。

オームの法則を使って物理モデルを変えている点に注意して下さい。

$H = I^2 \cdot R \cdot t$〔J〕（電流の２乗×抵抗×時間〔秒〕）

$= P \cdot t$〔W・sec：J〕（電力量×時間〔秒〕）

$= V \cdot I \cdot t$〔W・sec：J〕（電圧×電流×時間〔秒〕）

$= \dfrac{V^2}{R} \cdot t$〔J〕（電圧の２乗÷抵抗×時間〔秒〕）

このように熱を扱う単位には、SI 単位系の J（ジュール）を使うのです。

ジュールで表現する仲間を記述すると、W・sec（電力×時間〔秒〕）、V×Q（電圧〔V〕×電荷〔C〕）があります。

・ 仕事をすれば体が熱くなります。
・ 寄りかかって力だけを与えても仕事をしたことにはなりません、動かさないと仕事にはならないのです。

次に、発生熱量をカロリーで表すときは、1カロリーは、水1〔g〕を1〔℃〕上昇させるのに必要な熱量として考えます。式は、ジュール熱の式に0.24の係数を付けただけで、カロリー換算は、

$H=(0.24)\times I^2\times R\times t$〔cal〕（発生熱量）としてできます。

この係数の0.24がどこからきたのか調べてみましょう。

ジュールとカロリーの関係は、1〔cal〕＝4.186〔J〕ですので、

$1\mathrm{J}=\dfrac{1\cdot\mathrm{cal}}{4.186}=0.239\cong 0.24\mathrm{cal}$ となるからです。

今度は、ワット時とカロリーの関係を調べると、1〔cal〕＝4.186〔J〕ですから、Jを基準に考えると、1〔J〕＝0.24〔cal〕になり、1〔W〕は、1秒間に1〔J〕の仕事をする仕事率です。これを逆にいうと、1〔J〕の仕事は1〔W・s〕になるのです。

次は、この関係を1時間で考えると、1時間は3600秒ですから。3600倍（60×60）すれば1ワット時（W・h）の仕事がでてきます。この関係からワット時とカロリーは、次のように換算できるのです。

・ 1〔W・s〕＝1〔J〕＝0.239〔cal〕≅0.24〔cal〕
・ 1〔cal〕＝4.186〔J〕≅4.2〔J〕
・ 1〔kcal〕＝4186〔J〕＝4.186〔kJ〕
・ 1〔W・h〕＝3600〔W・s〕＝3600〔J〕＝860.42〔cal〕≅860〔cal〕

以上から、ワット時とカロリー及びジュールとカロリーの関係は意外にもすっきり換算できます。

カロリーとジュールの関係を求めるには、1cal≅4.2Jとして、

1：4.2＝求めたいcal：求めるJ

の比例式で簡単に求めることが出来るのです。

今度は電荷が移動したときを考えます。

いま、1〔V〕の電位差を与えて、1Q〔C〕の電荷が移動すると1〔J〕の仕事をします。このとき移動する電荷は、流れる電流と移動時間のかけ算（Q=I・t〔C〕）ですから、1〔V〕の電位差を持つ2点間に1〔A〕の電流を通じると、毎秒1〔J〕の仕事をするというのです。この関係は次のように式をあてると説明できるのです。

電荷は、電流×時間です。

Q=I・t〔C〕とするとV・Q＝W〔J〕＝V・I・t〔J〕

になり、電気の仕事もジュールで表せるのです。このように熱量に換算できれば、力学でも同じになり、力〔N〕×距離〔m〕で表す単位は、電気と

おなじようにＪになるのです。

SI 単位系を MKS に置き直すと、次のようになります。

1〔J〕＝1〔N〕・1〔m〕＝$1\mathrm{kgm^2s^{-2}}$

9.8 を重力の加速度単位とすると、1〔J〕＝$\frac{1}{9.8}\times 1$〔kg･m〕で、$\frac{1}{9.8}$〔kg〕のものを 1〔m〕動かすときの仕事になるのです。

３．熱の発生

(1)　発熱

実際の電気回路にジュールの法則をあてはめて発熱を調べてみます。

図 4.3 は抵抗に乾電池を接続した図で、I〔A〕は電流、R〔Ω〕は抵抗です。

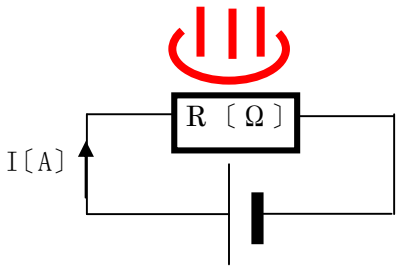


図 4.3

電池の電位が与えられると、電位勾配の関係から電子が引きつけられて抵抗の中を移動します。

このときに移動する電子の電気量（電荷：*quntity of electricity*）が移動すると、抵抗 R は、電子の移動を制限し自身が発熱します。

直流回路ではこのような形で発熱をします。交流の場合は、第 1 章で説明したように常に大きさと方向の異なる電流が一定周期で繰り返しますから、磁界を通じる磁気回路にはファラディ・レンツ則による磁界と電界の変化から円電流（うず電流）が流れ、電線断面と長さの比で表す抵抗に加えて、この渦電流が付加されます。

繰り返しの回数が多いほど、電線の巻き数が多いほど円電流が多くなりますから発熱損が生まれるのです。

この損失は、鉄損（ヒステリシス損）と呼ばれる損失で渦電流によって生じた熱と同様に回収不可能な損失になるのです。

第５章　電力と電力量

１．電力とはなにか

電気が１秒間に行う仕事の量を表すのが電力です。電力を概念的に理解するために、船内の電気工事の例で、始動器盤から主配電盤まで電線を布設する場合を考えます。

電力は１秒間（単位時間）にどれだけの仕事をしたかですから、電気の能力です。

これを電路布設作業に置き換えてみます。すると１人で工事を行った場合には６０分がかかったものが、６人で同じ工事をした場合は１０分で終了しました。

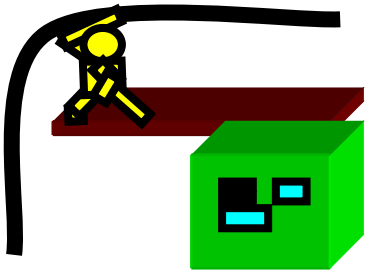


図 5.1

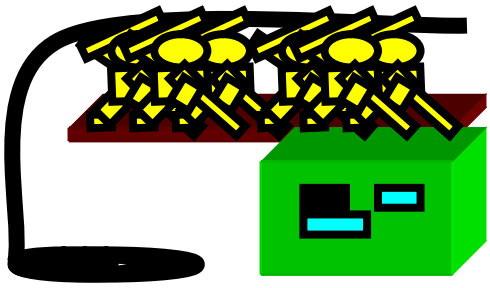


図 5.2

時間はどうあれ、図 5.1、図 5.2 のように１人より６人の方が早く済むことは、誰でも理解できると思います。

いま、電圧は電流を押し出す圧力ですから作業員数、電流の量を電線の数とすると、1〔W〕の電力は１秒間に１〔J〕の割合で仕事をする能力（仕事率）のことですから、電力Ｐを１人の作業者に例えると、$P=1\left[\frac{J}{t}\right]$、6 名分で $P=6\left[\frac{J}{t}\right]$ となり６倍の仕事をしたことになります。

次に、仕事に要した時間を見ると、電力と電流の関係は仕事の能率と考えることができるため、次式のように表せます。

$$P=\frac{W}{t}=\frac{V\cdot I\cdot t}{t}=V\cdot I\ [W]、\left[\frac{J}{t}\right]、P=V\times I\ [W]$$

力学系でも仕事は、時間要素が出てきましたが、電流が流れる時間によっても熱量は変化するので、電力は、1 秒間当たりの仕事量（$\frac{J}{sec}$）で定義されるのです。

いま、100〔J〕の仕事を 1〔sec〕で終わらせるのと、10〔sec〕で終わらせるのでは、行う仕事の量は同じ 100〔J〕でも、1〔sec〕で終わらせるのか、10〔sec〕かけて終わらせるのかでは、随分と仕事の能率は違ってきます。

当然 1〔sec〕で終わらせる方が能率はいいのですが、その分、電力を必

要とします。

では、この関係を計算で確かめてみましょう。

$P=\frac{J}{sec}$ですから、$\frac{100J}{1sec}$=100〔W〕になり、もう一方は、$\frac{100J}{10sec}$=10〔W〕になります。したがって、1〔sec〕で終わらせるためには、10〔sec〕かかったよりも多くの仕事量が必要になることが分かります。

次は、電力の種類を説明しますと、電力は、P=V×I と定義しましたが、実は正確ではありません。直流の場合には、P=V×I としてよいのですが、交流になると、皮相電力、有効電力、無効電力に分かれるからです。

交流の電圧 V×電流 I で表す電力は、皮相電力といって平均的な電力ですから、実際に発電機を動かす原動機が燃料を炊いてした仕事とは整合しないのです。

これらの電力の詳細は、第８章で詳しく述べていますので参考にしてください。

２．電力量とはなにか

電力量とは、電気をどれだけ多くの電力をどのくらいの時間使ったのかを表すもので、W･h で表します。SI 単位系では、電力量の単位は、電力のところで説明したように W･s の仕事でしたが、電力量をワット秒で表すのは実用的ではありませんね。

そのため、ワット時〔W･h〕又はキロワット時〔kWh〕が使われているのです。

私たちの家庭で使用した電力は、電気会社から１ヶ月間使用した電力量として請求を受けますが、この料金は、電気会社の使用量対価格で決められていて、使用量が増加すると加算される仕組みになっています。

いま、100〔W〕の電球を１時間 30 分使用したら、電力量〔Wh〕は 100〔W〕×1.5〔ｈ〕=150〔Wh〕になりますが、電力と電力量の違いを水道に置きかえて考えてみましょう。

まず、水の流れる量を電力、容器に溜まった水を電気量とします。始めの 30 分間は、毎時５リットルの水を流し、その後、蛇口をもっと開いて、２倍の 10 リットル 30 分間流したとします。

そのときに溜まった水の総量は、$\frac{5〔\ell〕}{1〔Hr〕}\times 0.5〔Hr〕+\frac{10〔\ell〕}{1〔Hr〕}\times 0.5〔Hr〕=7.5$〔ℓ〕になり、容器には１時間で 7.5 リットルの水が溜まったことになります。

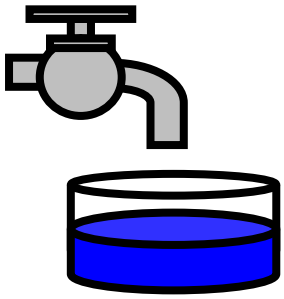


図 5.3

さらに、このような問題を電力と電力量と計算してみます。

30 分間は、5〔W〕の豆電球を点灯し、次の 30 分間はもう一個追加して、合計 10〔W〕の豆電球を使用したときの電力量を考えます。

5〔W〕×0.5〔h〕＋10〔W〕×0.5〔h〕＝7.5〔Wh〕

この計算から、1 時間に 7.5〔Wh〕使った計算になりますが、式に注目していただくと、使った電力と時間の積算量になっています。

このように私たちが支払っている電気料金は、どれだけの量を何時間使用したかが積算されて請求を受けるのです。

先輩から一言！

第４、５章は、電気の仕事や仕事率、電力や発生熱量について説明しました。この章では仕事は熱エネルギを消費することを理解戴くために、私たちの電気工事に関係が深い図を使って仕事や仕事率と電力量を説明しましたが、ジュールの単位は分かりましたか。

ここは、おもしろい顔から始めましたが、記述のような実感はできましたか？

仕事は、疲れることではなくて汗をかくことですね。

食べたものが運動エネルギに替わり熱に変換されて消費されることが仕事なのです。

さて、この章で使った「J：ジュール」は、SI 単位系（ル システーム アンテルナショナール デュニティ）といって、１９６０年に、国際単位として標準化された単位で、エネルギを表す単位として使われています。

しかし、時として工学単位との間で変換して利用するときもありますので補足として説明をしています。「J」は電力や仕事、熱エネルギとの関係で良く使うので覚えて下さい。

第６章　磁気と電流の関係

1.　地磁気

方位磁針の針がおおよそ南北を指すことは古くからよく知られています。

これは、地球自体が北極に磁石のＳ極、南極にＮ極がある巨大な磁石で北極と南極の間には、図 6.1 に示すような磁界ができていて方位磁針はこの磁界に沿って南北を指すのです。地球の磁界のことを地磁気といいます。

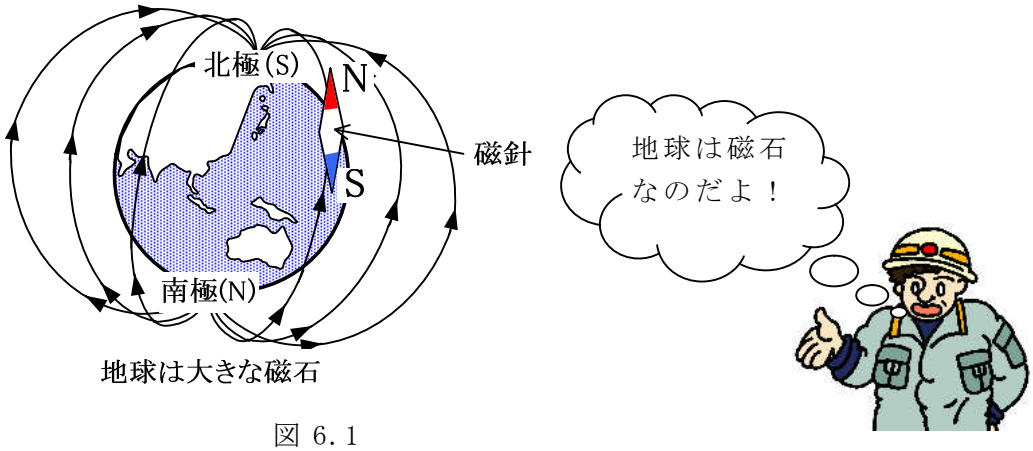


図 6.1

2.　磁石の性質

磁石を鉄粉中にいれると、図 6.2 に示すように、鉄粉は、その両極に多く付着します。このように、磁石の吸引力の最も強い両端を磁極といいます。

図 6.2

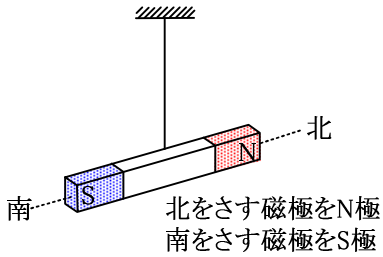


図 6.3

磁石は、図 6.3 のように棒磁石の中央を糸でつるすと、ほぼ南北方向を指します。このとき、北を指す磁極を N 極、南を指す磁極を S 極といいます。

磁石は、かならず N 極と S 極が一対の性質があって、N 極は北極（North Pole）の頭文字、S 極は南極（South　Pole）の頭文字から付けられています。

磁石を二個使用して、先端を互いに接近させると異なった極（N と S）どうしは吸引し、同じ極どうし（N と N、あるいは S と S）では反発をする性質があります。

このように磁石がその周囲に影響を及ぼし、吸引や反発する力を磁力といい、磁力の及ぶ空間を磁界といいます。

3.　磁気のクーロンの法則

距離がｒ〔m〕離れた相互の磁気量m_1〔Wb〕とm_2〔Wb〕の間に作用する磁気の力 F〔N〕をクーロンの法則といって、式 6.1 のように距離の二乗に反比例する式で表されます。

$$F \propto \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \text{〔N〕} \qquad \text{（式 6.1）}$$

いま、m_1とm_2が同じ極どうしであれば、図 6.4 に示すように、反発力、異なった極どうしであれば吸引力として作用するのです。

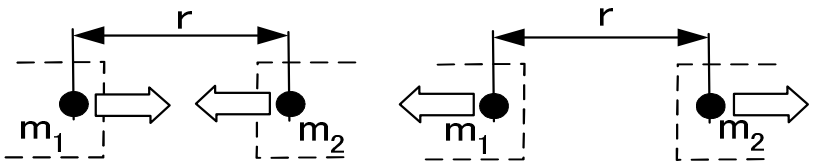


図 6.4

式 6.1 から磁気の力（F）は、距離（ｒ）が２倍になると 1/4 に弱まり、距離が 1/2 になると、４倍に強まることが分かります。磁極の強さは次に述べる磁力線の多いか少ないかによって決まるのです。

例えば、棒磁石を図 6.5(A)のようにつないだ場合、磁力線の数は増加しないから、強くなりません。しかし図 6.5(B)のように並べると、磁力線の数が増加するので強くなります。

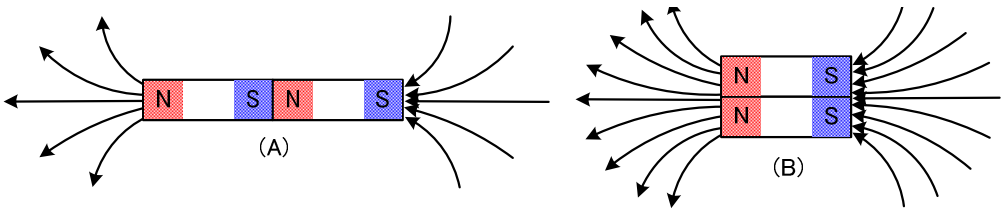


図 6.5

ｍ：磁気量	単位［Ｗｂ］	ウェーバ
Ｆ：磁　力	単位［Ｎ］	ニュートン
ｒ：距　離	単位［ｍ］	メートル

4.　磁界と磁力線

磁極間には相互に力が働きます。力が働くということは、磁極が周りに何らかの影響を及ぼしているということです。

影響を及ぼしている空間を磁界（あるいは磁場）といいましたが、磁界は直接、目では見ることができませんが、以下の方法では間接的に見ることができます。

図 6.6 に示したように、棒磁石の上に紙を乗せその上に砂鉄を全面に敷き詰めると砂鉄の分布によって、棒磁石の先端をつなぎＮ極とＳ極を結ぶ曲線ができあがります。

これは砂鉄の一粒、一粒が棒磁石に磁化され、一時的に磁石になったために起こる現象で、この砂鉄が描く曲線を磁力線といいます。

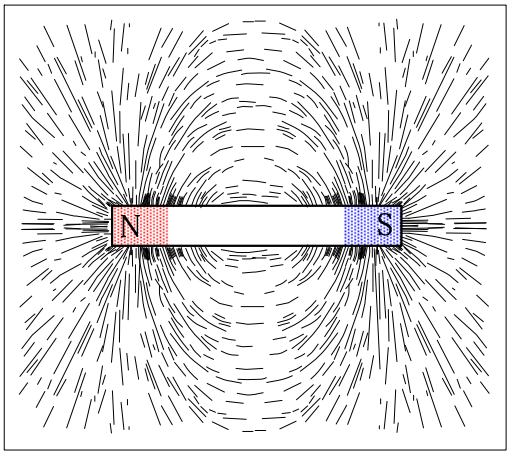


図 6.6

磁力線には次の性質があります。

磁力線は（A）のように必ずＮ極から出て途切れることなくＳ極で終わります。

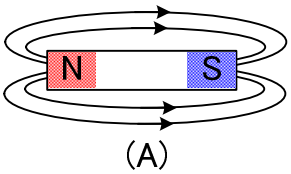


図 6.7

磁力線の方向は（B）のように磁針を置いたときに、磁針のＮ極が指す方向です。

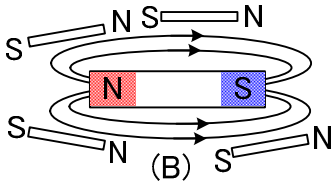


図 6.8

磁力線は異極どうしで吸引し（C)、同極どうしは反発します。(D)

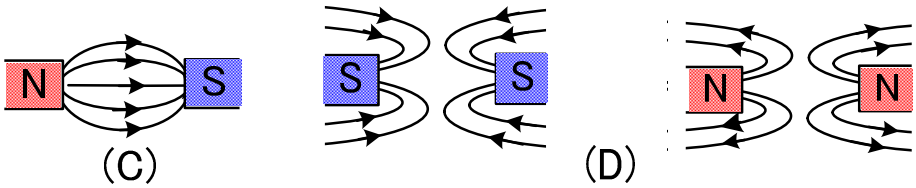


図 6.9

磁力線は単位面積あたりの本数が多いほど磁力が強くなります。

磁力線は伸びたゴムバンドのようにそれ自身が縮まろうとする伸縮性があります。

磁力線は１本１本が互いに反発しあい、交差することはありません。

磁力線は立体（３次元）的に存在します。

磁力線と同じように目に見えない電気力線もありますが、この違いは第７章で説明しますので参照して下さい。

5.　磁気誘導

鉄片を磁石の磁界（磁力が作用している空間）内に置くと、磁気がまったくなかった鉄片は、図 6.10 に示すように、磁石のＮ極に近い方にＳ極、遠いほうにＮ極が現れて、鉄片も磁石になります。このように鉄片が磁気を帯びる現象を磁気誘導といい、この鉄片は磁化されたといいます。磁石に釘をつりさげると釘が何本もつながって吊り下げることができるのは、それぞれの釘が磁石になって異極（Ｎ極とＳ極）どうしの間に吸引力がはたらくためです。

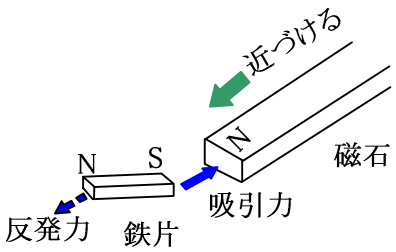


図 6.10

一般に磁気誘導によって磁化されるもの（磁石に吸引されるもの）を強磁性体といい代表的なものに鉄、ニッケル、コバルトなどがあります。ガラス、プラスチックのように磁石に引き付けられないものを非磁性体といいます。鋼の場合、磁石で一度磁化されると磁石を取り除いても磁気が残る（磁石の性質が保存される）ものもあり、この残った磁気を残留磁気といいます。

残留磁気は､後に述べるように発電機で発電するときに必要なものです。

6.　アンペールの右ネジの法則

大きな磁石に方位磁針を近づけると、方位磁針が動きます。

これは大きな磁石の周囲の磁場によって方位磁針が影響を受けたためです。

図 6.11 のように電流が流れる電線に方位磁針を近づけても、方位磁針が動きます。

電流を増加させると方位磁針の動きも大きくなり、電流が一定のまま方位磁針を遠ざけると、方位磁針の動きは小さくなります。このことから、電流の周囲にも磁場が発生していて電流の大きさと周囲の磁場は比例の関係にあって、電流からの距離と周囲の磁場は反比例の関係にあることが分かります。

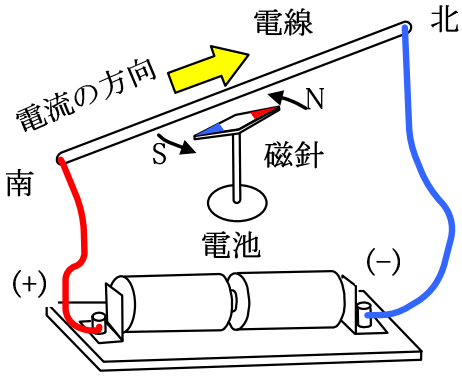


図 6.11

磁界の分布の状態は直接目に見ることができませんが、図 6.12 のように、電線に電流を流すと、電線と同心円状においた磁針の針が振れることから、図の点線に沿って磁力線が発生していることが分かります。電気では磁力線の分布を磁場といいます。

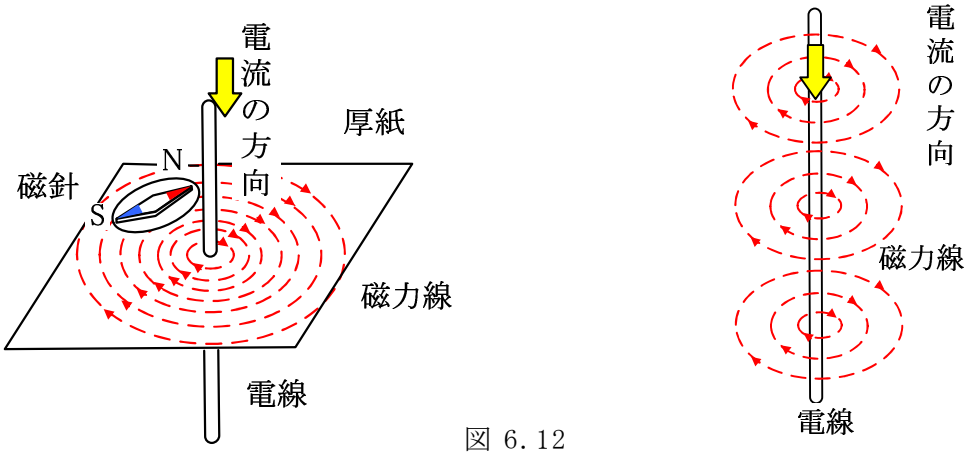


図 6.12

磁石がつくる磁力線は、N 極から出て S 極に入りましたが、電流の周りに発生する磁力線は、電流の周りをリング状に分布しており、ネジを締め

るときの右ネジの方向(時計方向)に回転させる方向に発生します。

磁力線は、電流が流れる電線全てにわたって３次元的に発生します。

磁界は、電流を流すと必ず発生し電流が多ければ多いほど磁界は大きくなります。これをアンペールの右ネジの法則といいます。

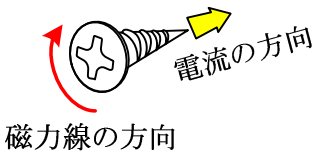


図 6.13

電線に流れる電流の向きと磁力線の向きは次の記号で表します。

電流の記号⊗（クロス）は、電流が紙面の表から裏へ流れていることを示し、⊙（ドット）は、反対に裏から表へ流れることを示しています。

次に、電線を図 6.14(B)のように円形（これをコイルといいます。）にして電流を流した場合、磁界はどのようになるでしょうか。

この現象は、アンペールの右ネジの法則によって、説明され、電流の向きに同心円状の磁力線ができます。図 6.14(C)のように非常に薄い円板状の磁石で置きかえた場合に良く似ており、図のように右側が N 極、左側が S 極になります。

また、図 6.14(D)のように電子は原子核の回りを回転しながら電子自体も自転運動（これをスピンという。）をしています。電子は電荷を持つのでコイルに電流を流したときと同じく、磁力線が発生します。電子のもつ磁石の性質については第１章で説明したとおりです。

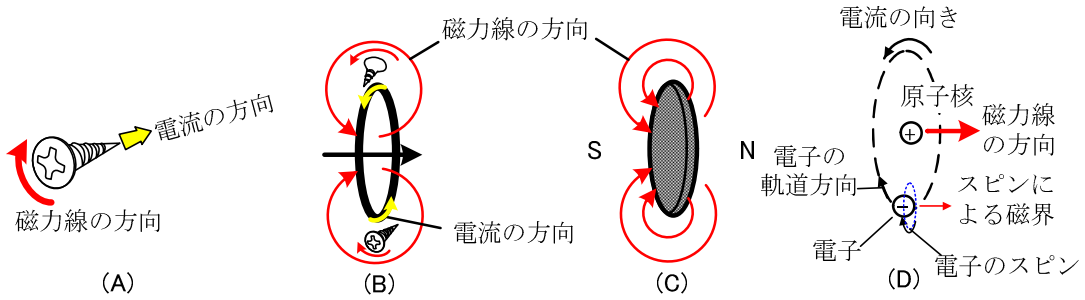


図 6.14

コイルを図 6.15 のように、接近して巻いたものをソレノイドといいます。ソレノイドは円形コイルを連結させたものと考えることができます。つまり円形コイルをＮ回巻いたソレノイドの磁界は、一巻きの円形コイルの磁界がＮ個たし合わされたものとして一個の磁石のはたらきをするのです。

ソレノイドの内部に鉄心をいれたものを電磁石といいます。

電磁石の磁界の方向は、円形コイルの場合と同じですが、図 6.16 のようにコイルに流れる電流の向きに指を添えて握ったとき、親指がさす方向が

磁界の方向になります。

この電磁石に発生する磁界（ϕ〔Wb〕）は、コイルの巻き数Ｎとコイルに流れる電流Ｉ〔A〕の掛け合わせたものに比例します（$\phi \propto N \times I$）。

このように電流の作る磁力線は電流×巻き数によって定まり、これが磁界を発生する能力を示すため、起磁力といいます。単位はアンペア巻き数〔AT〕です。

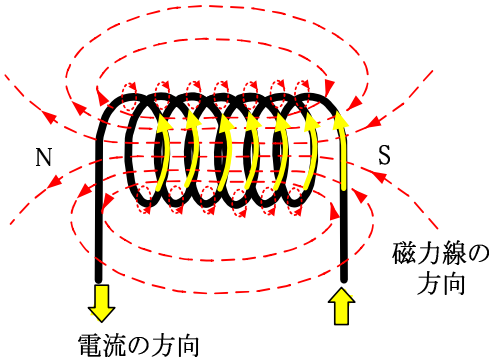


図 6.15

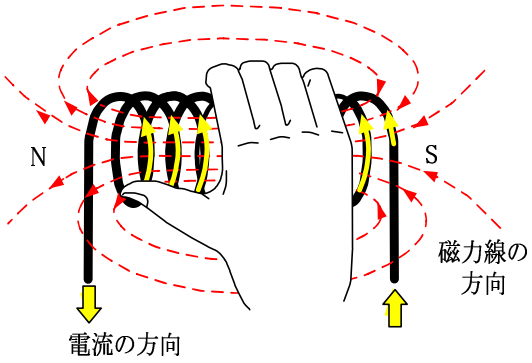


図 6.16

Ｎ：コイルの巻き数	単位［Ｔ］	ターン
Φ：磁界の強さ	単位［Ｗｂ］	ウェーバ
Ｉ：電流	単位［Ａ］	アンペア

7.　ヒステリシス

先に、コイル内に鉄心を入れてコイルに電流を流すと、磁界ができ、電磁石になる説明をしましたが、こんどは電線に流れる電流でできる磁力線によって、鉄が磁化される現象を説明しましょう。

鉄が磁石になる理由は、普通、磁気分子説によって説明され、これによると鉄が磁化される前は、図 6.17（A）のように磁気分子が雑然と並んでいて、個々の磁気分子のＮとＳが打ち消しあっているため、全体として磁石になりません。

この鉄を磁界内におくと、磁力線によって磁気分子が磁力方向にＮ極を向けて、図 6.17(B)のように整列し、鉄全体として強い磁石になります。

全ての磁気分子が整列してしまうと、それ以上の電流をコイルに流しても電磁石の磁界は強くなりません。このような状態を磁気飽和といいます。

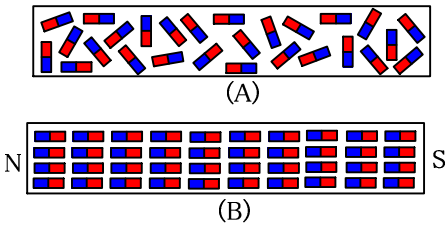


図 6.17

原子の中で電子は、原子核の周りを周回し電子自身、スピン（自転）しており、原子核の周りをまわる電子の運動により生じる磁気と、電子自身のスピンにともなう磁気の二つによって、物質に磁気の性質を発生します。

原子の中には、いくつかの電子が含まれていて、それらの方向は同じではないためお互いにうち消しあい原子全体として磁気をもたないものが多いのですが、ある種の原子では、これらの打ち消しあいが起こらず、原子的な磁石として振る舞うものがあります。いま、磁化されていない鉄心にコイルを巻き、これに電流を流して磁化する場合を考えます。

このときコイルに発生する磁界を磁化力といい、記号をH〔$\frac{A}{m}$〕で表し、鉄心内の磁束密度を測定し、これを記号 B〔T（$\frac{Wb}{m^2}$）〕で表します。

コイルの電流を増やすと磁化力Hも増え、鉄心内の磁束も変化します。

この関係をグラフにしたもの（図 6.18）を磁化曲線（H-B 曲線）またはヒステリシス曲線（履歴曲線）といいます。

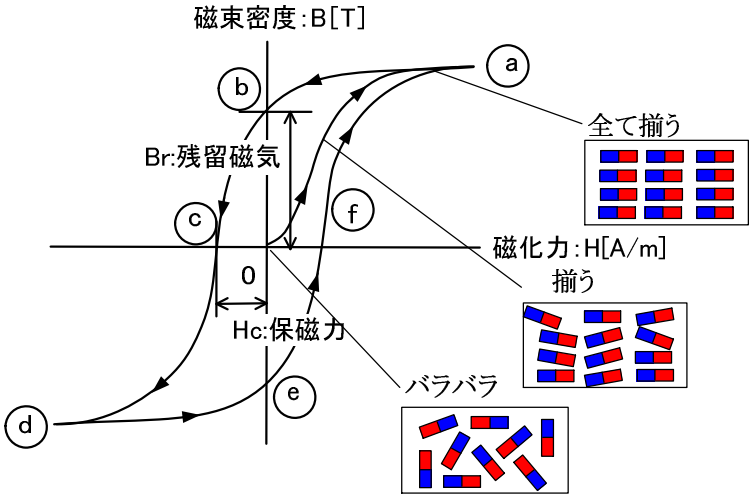


図 6.18

グラフ上の b 点の高さ（y 切片）がその磁化の強さを表しています。

これを残留磁気（または残留磁束密度）といいます。b の値が大きければ大きいほど、永久磁石として強い磁石になるわけです。

磁性体の磁化力がゼロになったときの外部磁界の強さを、保磁力といいます。

理想的な磁性体では、行きと帰りでｙ切片の値や、ｘ切片の値は同じになります。

例えば、発電機や電動機の中にあるコイルの鉄心は、コイルに流れる電流の変化によって磁化のされ方が変化します。この際、鉄心内部の磁気分子は、時間とともにその方向が変化するとき、この変化に伴う磁気の分子間摩擦によって熱が発生します。

図 6.18 のループ（a→b→c→ｄ→ｅ→ｆ）で囲まれた面積に比例したエネルギが鉄心内部で発熱し、この熱が鉄の温度を上昇させるわけです。通常、熱になって空間に放出したものはこの電気系で回収することができないので､エネルギを損失とおいてヒステリシス損といっています｡発電機、電動機、そして変圧器に使われる鉄心には、この損失を少なくするため、一保持力が小さくヒステリシス曲線の面積の少ない、けい素鋼板が使われます。

Ｂ：磁束密度　　単位［Ｔ（$\frac{Wb}{m^2}$）］テスラ

Ｈ：磁化力　　単位［Ａ/ｍ］　アンペア･パー･メートル

8.　電磁力

モータを回転させたり電流計や電圧計の指針を振らせたりすることができるのは、電流（I）と磁力線の間に起こる力（F）によるものです。

図 6.19 のように、磁界内の導体に対して黄色の矢印の向きに電流（I）を流すと、導体に発生するアンペールの右ねじの法則による磁界と、磁石の磁界との関係で、導体左側では磁力線の密度が高く（同方向のため）、右側では粗く（反対方向のため）になりますから、磁力線の性質によって導体は力を受けて青色の矢印の方向に動きます。このときの力を電磁力といいます。

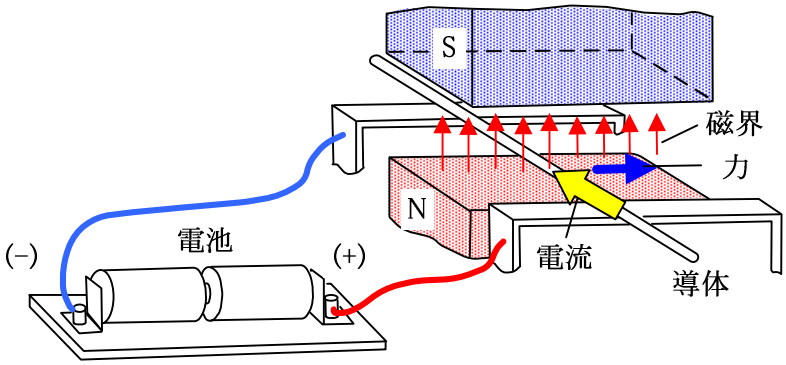


図 6.19

Ｆ：磁力　　単位［Ｎ］　　ニュートン

Ｉ：電流　　単位［Ａ］　　アンペア

(1) 電磁力が発生するわけ

ではなぜ電磁力が発生するのでしょうか。磁界内に導体をおき図 6.20 に示すように、電流を紙面の表から裏の方向に流すと、アンペールの右ネジ法則により導体の周囲に同心円形の磁力線が発生します。(図 6.20 (B)) そして、図 6.20 (C) のように、電流による磁力線と磁石による磁束が、導体の上側では強めあい、下側では打ち消しあうことで磁力線が減少します。

このような磁束分布において、磁力線はゴムバンドのように縮まろうとする性質があるので、導体は磁力線の少ない方向へ押されて動きます。この力が電磁力です。

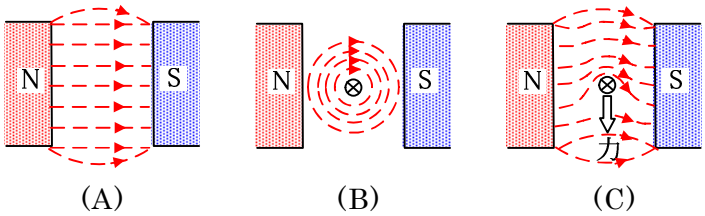


図 6.20

(2) フレミングの左手の法則

導体に働く電磁力の向きは図 6.21 に示すようにアンペールの右ネジ法則により発生する磁力線が周囲の磁界と干渉することで磁力線と磁界が強めあう下方向から押し上げられるように上向きの力が発生します。これは、左手の親指、人さし指、および中指を互いに直角に開き、人さし指で磁力線の方向、中指で電流の向きをさすと、導体にはたらく電磁力が親指の方向になるフレミングの左手の法則でも確認することができます。

電磁力の大きさは、磁束密度と導体の長さ、導体に流れる電流に比例します。

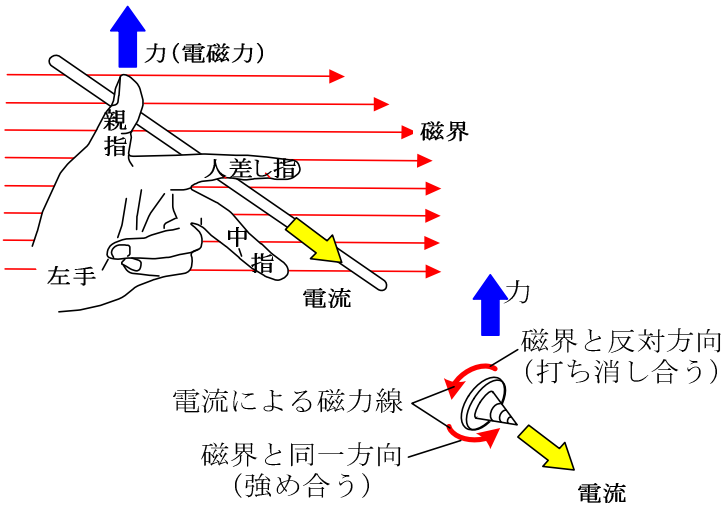


図 6.21

９．電磁誘導作用

導体（電線）に電流を流すと、そのまわりに磁力線を発生します。

そして、導体に流れる電流の方向とこれによる磁力線の方向の間には、アンペールの右ネジの法則がありました。

逆に、導体の近くで磁力線を急激に変化させると、導体内の自由電子が動いて、電気が発生します、これを電磁誘導作用といいます。

(1)　誘導起電力は何故発生するか

磁界を動かした場合と導体を動かした場合に発生する誘導起電力の大きさと方向について次に説明しましょう。

(2)　磁界を動かしたとき

導体と磁力線が切りあう場合図 6.22 のように、導体（電線）を磁束密度が一定な磁界内に直角に置き、導体を磁力線と直角に上下すると、電磁誘導作用によって、起電力が発生します。

同じように図 6.23 は導体が連続的に磁力線を切るようにした発電機の原理を表しています。導体に発生する起電力の大きさと方向を求めてみましょう。

ここで導体の上部と下部の磁界に注目して見ます。

導体の上部は磁石による磁界と電流（電子の流れ）による磁界の向きが異なるため、磁束は打ち消しあい磁束密度は小さくなります。

導体の下部は磁石による磁界と電流（電子の流れ）による磁界の向きが同じであるため磁束が合成され磁束密度が大きくなります。

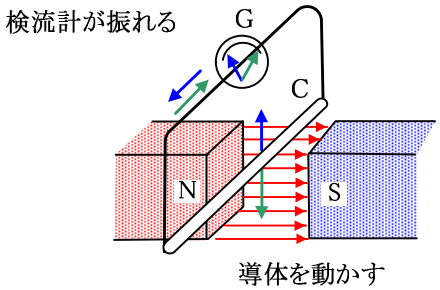
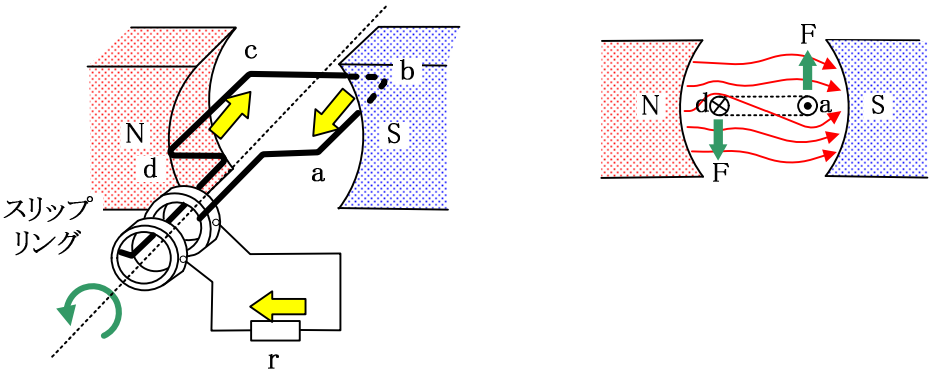


図 6.22



発電機の原理

図 6.23

・　**起電力の大きさ**

導体の数、および導体が切る磁束密度が一定のとき、起電力の大きさは、導体と磁力線が切りあう速さに比例します。

・　**起電力の方向**

図 6.24 に示すように導体を上側に動かした場合に、動かした方向と逆向きに下向きの力を発生するように起電力が発生します。

起電力の方向はアンペールの右ネジの法則で電流が流れる方向と一致します。

これは右手の中指、人さし指、親指を互いに直角に曲げたとき、人指し指を磁力の方向に向け、親指を導体の方向に向けると、中指の方向が起電力の方向を示すことでも確認することができ、これをフレミングの右手の法則といいます。

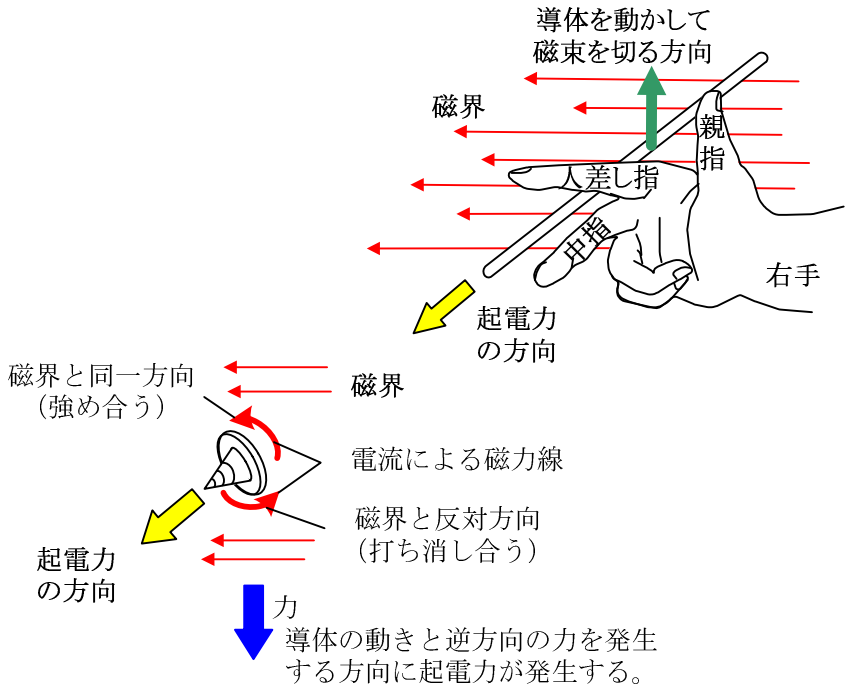


図 6.24

(3)　導体を動かしたとき

コイルと交わる磁束が変化する場合

図 6.25(A)のように、コイルを固定しておき、磁石のＮ極を近づけたり、遠ざけたりします。逆に、磁石を固定しておき、磁極にコイルを近づけたり、遠ざけたりします。図 6.25(B)のように、ＡとＢのコイルをともに１個の鉄心に巻いて、Ａコイルのスイッチを開閉すれば、その瞬間にＢコイルの磁束が変化します。

これは図 6.25(A)と同じ状態になり、コイルと磁束が交わって、その磁束の変化が続く間、コイルが磁力線を切っているように考えることが

でき、電磁誘導作用により、コイルに起電力が発生します。

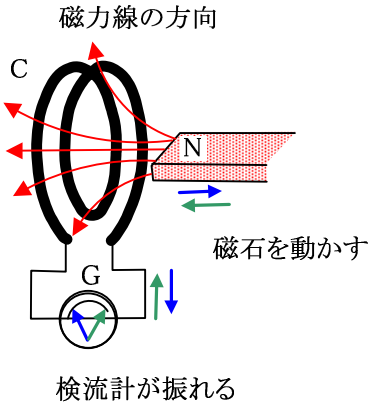


図 6.25（A）

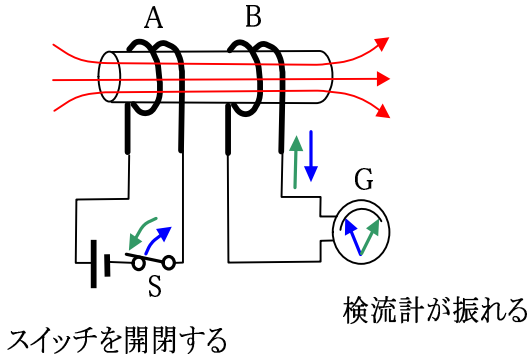


図 6.25（B）

(4)　起電力の大きさ

電磁誘導作用によって、コイルに発生する起電力の大きさは、このコイルと交わる磁束の変化する割合に比例する。これをファラディの法則といいます。

(5)　起電力の方向

コイルと交わる磁束が変化するとき、コイルに誘導される起電力の方向は、その磁束の変化を妨げるような向きに磁束を発生させる起電力を生じます。これをレンツの法則といいます。

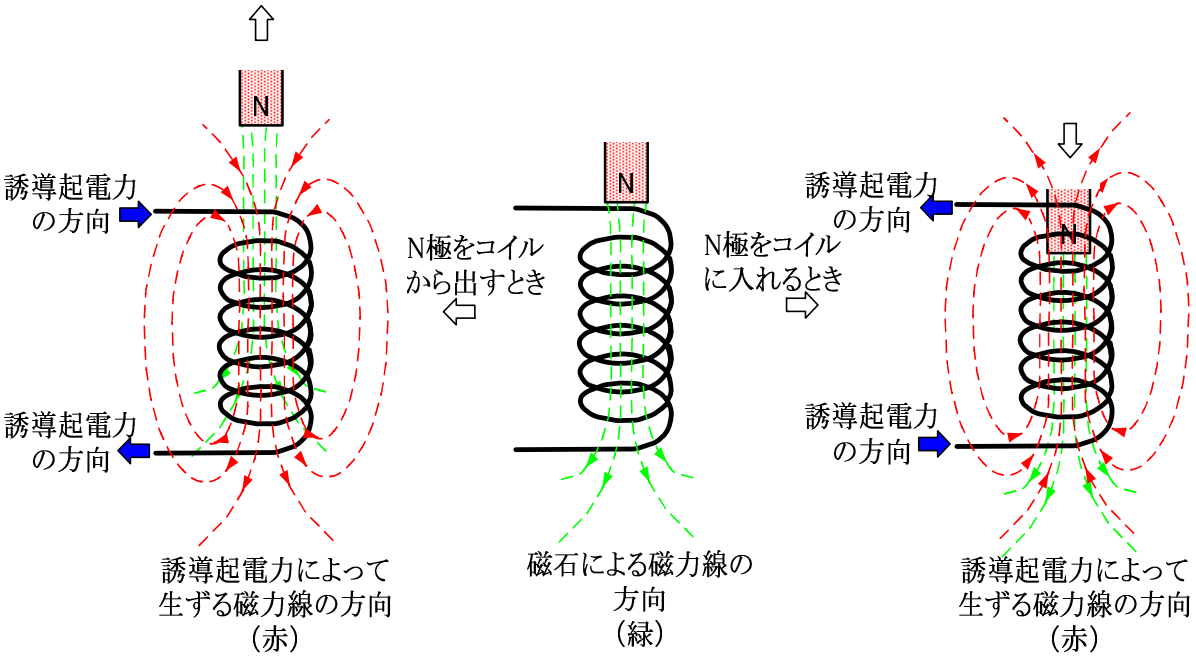


図 6.26

ファラディ・レンツの法則は、第 1 章にあるように、原子核の周りをスピン（自転）しながら軌道上を回っている電子が自身の発生する磁力

線によって小さな磁石になっていることによっています。

具体的には電流が流れることによって内部に磁力線が発生しトルクを発生するモータや、磁界が変化することにより電流が流れる発電機もミクロの目で見れば、どちらも導体中の電子が受ける磁界と力によるものであるということになります。

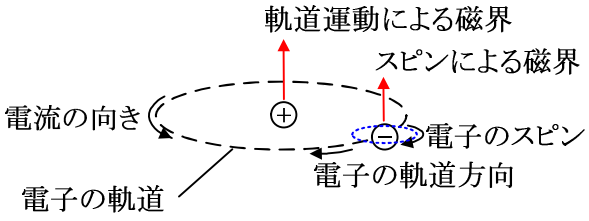


図 6.27

(6) うず電流

運動する物体はどこまでも運動しようとし、静止する物体はいつまでも静止しようとします。力学でおなじみの“慣性の法則”です。電磁気にもこれと同様の働きがあり、磁界変化にさらされた導体は、その変化を妨げようとして、電磁誘導の作用により磁束が生じます。この磁束をつくるのがうず電流です。

分かりやすくいえば、うず電流は導体内部にできるコイルのようなものと考えればよいでしょう。外部の磁界変化に対して、導体は自ら“天然のコイル＝天然の電磁石”となって、磁界変化を妨げようとするのです。

発電機の電機子鉄心や変圧器の鉄心には、薄い鋼板を積み重ねた成層鉄心が用いられています。その理由は、うず電流の発生を抑制させるのが目的です。では、うず電流とはどんなものか考えて見ましょう。

一枚の金属板を貫いている外部磁力線が時間的に変化すると、この金属板には、外部磁力線の増加を妨げる、反対向きの磁力線を生む円電流を流そうとする起電力が発生（電磁誘導作用）します。この起電力によって流れる円電流が図 6.28 に示すように、うずのように循環する電流となるので、うず電流と命名されています。

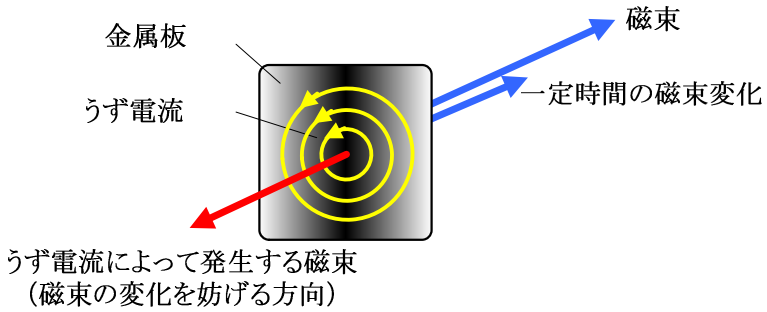


図 6.28

うず電流の働きは、大型車や電車などの電磁ブレーキに利用され、下り坂などでブレーキを作動させるときなど、補助ブレーキとして使われています。

このブレーキは、回転シャフトに取り付けたディスクと非接触に電磁石を配置するのが基本構造です。走行中に電磁石を作動させると、回転するディスクは電磁石の磁束の変化を妨げるように発生するうず電流により磁界が発生し、これにより反対方向の回転力が生まれてブレーキングが行われるのです。

(7)　うず電流と損失

電磁ブレーキは非接触なのでディスクなどの部品の磨耗がない利点があります。

では、電磁ブレーキによって速度を落としたとき、その運動エネルギはいったいどこに消えていったのでしょうか。エネルギ保存則からいって、無からエネルギは生ぜず、エネルギが無に帰することもありません。

このメカニズムはこうです。うず電流の発生でドラムにはジュール熱が現れます。

このとき発生した熱は、運動エネルギが熱に変換したものです。そして無限の空間に放出してエネルギを収支しているのです。

うず電流は、変圧器や電動機、発電機にとっては損失になるので、やっかいな存在ですが、積極的に利用したのが電磁調理器やＩＨ方式の電気炊飯器です。

うず電流は、変圧器や電動機、発電機にとっては損失になるので、やっかいな存在です。変圧器でやっかいさを説明します。

まず、一次コイルに時間的に変化する電流で作られる磁力線が鉄片を使って二次コイルに変化する磁力線として伝えるとき、二次コイルには一次コイルと同じような起電力を発生させます。このとき磁力線を通す鉄片には電磁調理器と同じようにうず電流が流れて発熱するのです。

そのため、変圧器や電動機、発電機にケイ素鋼などを磁力線の通り道となる材料として使用するとき、鉄片を薄くして積層して、このうず電流の損失を小さくする工夫をしているのです。薄くし積層した鉄片を鉄心とか成層鋼板と呼びます。

(8)　うず電流を抑える

発電機の電機子鉄心や変圧器の鉄心の場合、前者は電気子鉄心が磁力線を切って、後者は鉄心を貫いて変化する磁力線によって、それぞれ鉄心にはうず電流が発生するため、これを抑制するためには、図 6.29 に示すように、鋼板を薄くし、板どうしが電流回路を形成しないように、けい素鋼板の一枚一枚の表面に絶縁塗料を焼付け、これを重ねて成層させ、交流の電気抵抗を大きくして、うず電流の絶対値を少なくさせています。

うず電流損の抑制メカニズムは、一枚一枚の板に流れるうず電流により発生する磁力線が、隣どうしの板材で発生するうず電流による磁力線

の相互反発（キャンセルアウト）を利用し、その発生を抑える効果を活用して損失を抑えるのです。一方、この鉄片は磁力線を通す使命ももっており、うず電流を抑制し、利用しようとする磁力線のみをよく通し、かつ、保持力の少ないけい素鋼板が使われているのです。

変圧器からブーンという音がするのを聴いたことのある人もおられると思いますが、これは時間的に流れの変化する交流電流により、磁気回路を形成する成層鋼どうしがクーロン力を受けたり受けなかったりするため、その度にコイルが微少に振動し、空気を震わすために出る音です。

図 6.30 は変圧器の成層鉄心を表します。

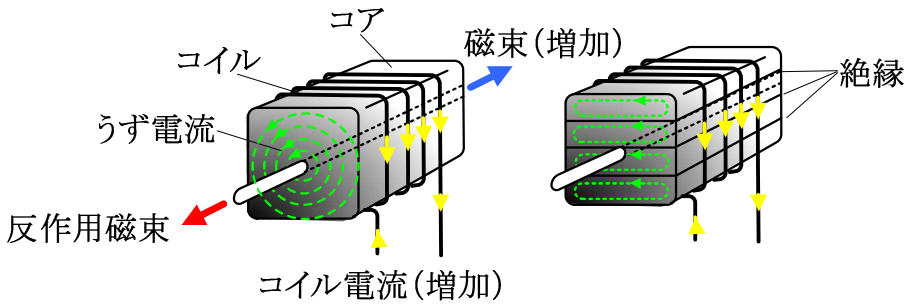


図 6.29

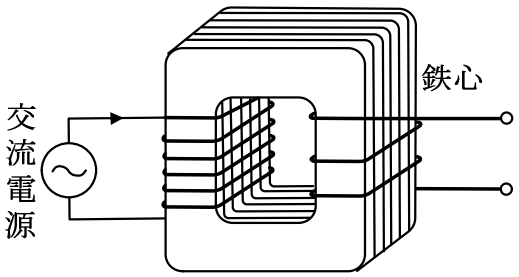


図 6.30

(9)　誘導電動機モデル

一方、うず電流を積極的に利用するものもあります。その一例が図 6.31 に示すアラゴの円板です。

これは誘導電動機の原理になるもので、図 6.31（B）において、磁石の移動方向には磁界が増加し反対側の磁界は弱まります。磁界の増減により図 6.31（C）に示すように二つのうず電流が発生します。

2 つの渦電流の合成電流によって磁力線が発生しこれが磁石による磁界と干渉することにより図 6.31（D）のようにアンペールの右ネジの法則による電磁力が発生します。これは図 6.31（C）のフレミング左手の法則でも確認することができ、磁石を回転させれば、円板も同じ方向へ回転することが分かります。

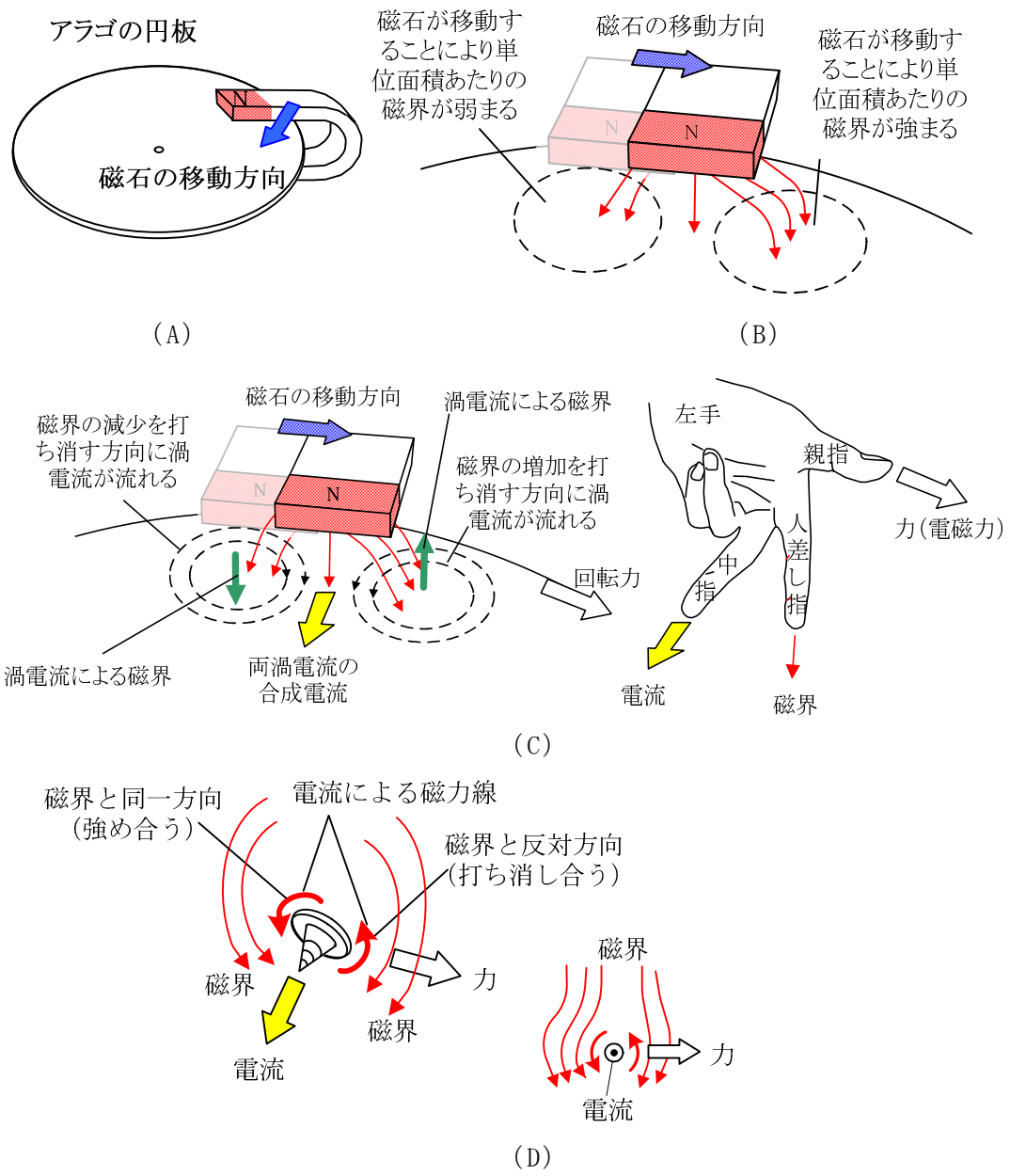


図 6.31

(10) 自己誘導作用

図 6.32 のコイルに、大きさの変化する電流 I〔A〕を流すと、電流に比例した磁束 Φ〔Wb〕が発生します。そのため、コイルと鎖交（コイルと磁力線が鎖のように交わること）している磁束が変化しコイル自身にも電磁誘導作用を起こし新しい起電力が発生させます。

それでは、自己誘導作用によって誘導される起電力の大きさを、コイルに流れる電流の変化から求めてみましょう。

Φ：磁束　　単位〔Wb〕　　ウェーバ

I：電流　　単位〔A〕　　アンペア

コイルに誘導される起電力の大きさは、コイルに鎖交する磁束の変化の割合に比例します。これを式で表すと、次のようになります。

$$e = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \text{〔V〕} \qquad \text{式 6.2}$$

e ：自己誘導起電力〔V〕　　N：コイルの巻き数〔回〕

Δ Φ：変化した磁束の量〔Wb〕　Δ t：磁束が変化するに要した時間〔sec〕

コイルに発生する磁力線数の数Φは、電流 I〔A〕とコイルの巻き数Nの積に比例します。　いま比例定数を k とすると、次式で表すことができます。

$$\Phi = k \cdot N \cdot I \text{〔Wb〕} \qquad \text{式 6.3}$$

式 6.2 の Δ Φに式 6.3 を代入すると

$$e = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -N \cdot \frac{\Delta(k \cdot N \cdot I)}{\Delta t} = -k \cdot N^2 \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \text{〔V〕} \qquad \text{式 6.4}$$

になります。$k \cdot N^2$は、コイルの巻き数、形状、材質によって決まる定数です。

そこで、この定数をLとおき式 6.4 を次のように書き換えます。

$$e = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \text{〔V〕} \qquad \text{式 6.5}$$

式 6.5 のLを自己インダクタンスといい、その単位をヘンリー〔H〕で表します。

つまり、自己インダクタンスとは、そのコイルに流れる電流の変化によって生じ
自己誘導起電力を求めるための係数(自己誘導係数)であるといえます。

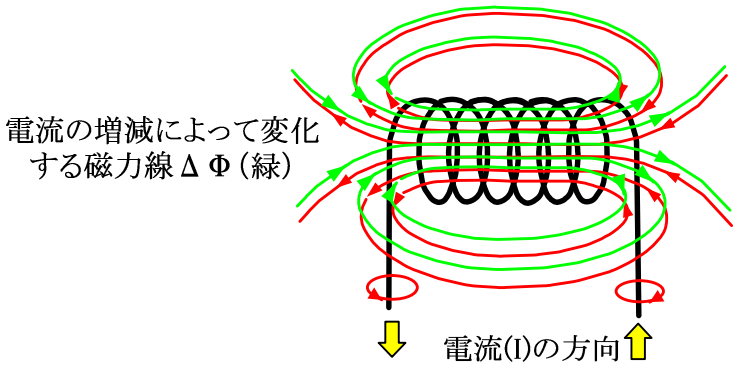


図 6.32

（11）相互誘導作用

図 6.33 を見て下さい。図 6.33(A)はコイルに電流を流すと磁束が発生することを表し、図 6.33(B)は、コイルに磁石を近づけたり遠ざけたりすると電磁誘導作用によりコイルに起電力を発生させることを表しています。

今度は、図 6.33(C)に示すように、磁石のかわりに右側のコイルを左右に動かすと、磁石を近づけたり遠ざけたりするのと同じく、左側のコイルに交わる磁束が変化し起電力を発生することを示しています。また、図 6.33(D)では、コイルＡおよびＢを固定しておき、コイルＡに流れる電流を変化させたときのものです。

このときスイッチを開閉すると、その瞬間にコイルＡの磁束が変化して、その磁束がコイルＢを貫いて起電力を発生します。

これらのことから、二つのコイルＡ、Ｂの一方のコイルに流れる電流が増加、あるいは減少したときのみ、電流変化に比例しコイルＡの磁束が変化すると、その磁束がコイルＢと鎖交する関係にあると、コイルＢにも起電力が誘導される現象が現れます。この現象を相互間に発生する事象なので、相互誘導作用といいます。

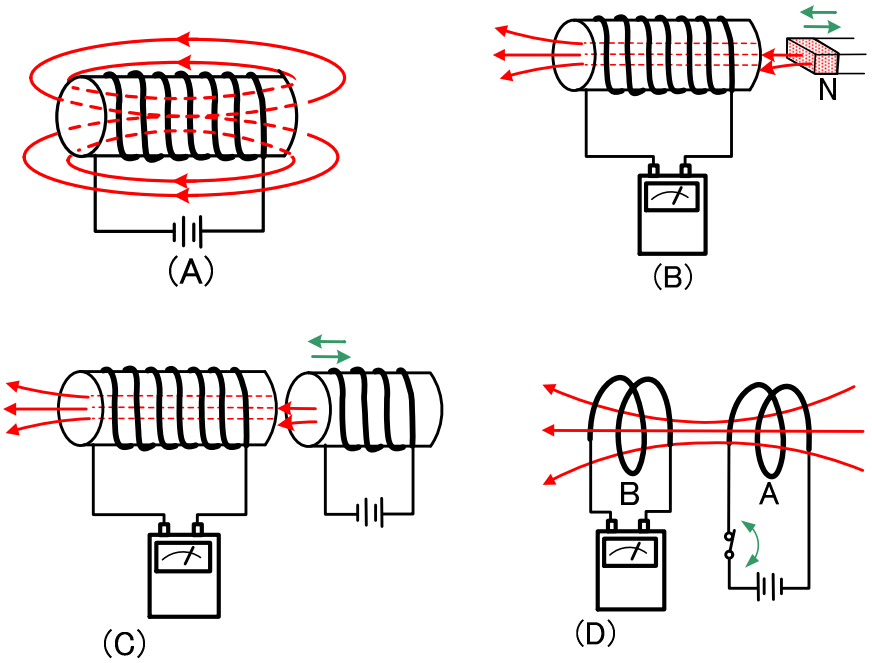


図 6.33

第７章　静電気

秋から冬にかけて空気の乾燥している時期に、服を脱いだり車のドアに触ったりするときに「パチッ」と音がし、痛いと感じたことがあると思います。これは静電気の仕業なのです。では静電気とはどのような電気のことを言うのでしょうか。

全ての物質は、多数の原子から構成されています。原子は陽子と中性子からなる原子核とその周りを回転する電子群から構成されています。陽子と電子の数は等しく正と負の電気量を担っています。

図 7.1 に示すように、電子は原子核の周りを公転していますが、もっとも外側の軌道にあるものを価電子といいます。

この価電子はエネルギを沢山持っているのですが、原子核との距離が大きいため結びつきが弱く、容易に軌道を離れて原子のなかを自由に移動できる自由な電子になるのです。これによって以下に説明する帯電という現象が起きます。

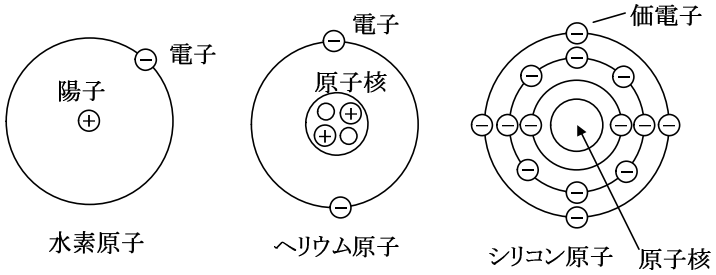


図 7.1

一般的に電気エネルギを帯びた電子を電荷といいますが、この電荷には正電荷と負電荷の二種類があって異なった二つの物体を摩擦すると、一方は（＋）の電荷、他方は、これと同じ量の（－）の電荷を帯びることになります。

そして、磁石の磁極間に力が働くことと同じように、正電荷と負電荷の間には引き合う力が働き同種の間では反発する力が働く性質があります。

このような電荷の作用から発生する力を静電力といいます。

1.　静電気のクーロンの法則

図 7.2 によると二つの帯電体の間にはたらく静電力の大きさＦ〔N〕は Q_1 が倍になれば F も倍になり、Q_1、Q_2 を変えずに r を倍にすると４分の１になり、つまり F〔N〕は電荷 Q_1〔C〕、Q_2〔C〕の積に比例し、電荷間の距離ｒ［ｍ］の二乗に反比例しそして静電力の方向は、両方の電荷を結ぶ直線状にあります。

これは、磁極間に関するクーロンの法則とよく似た関係で、電荷に関するクーロンの法則といいます。この法則によって静電力の大きさと方向を知ることができます。

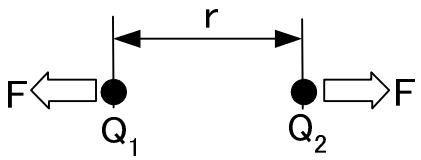


図 7.2

Ｑ：電荷単位［Ｃ］　　クーロン
Ｆ：力　単位［Ｎ］　　ニュートン
ｒ：距離単位［ｍ］　　メートル

2. 静電誘導

磁石の近くに鉄片を置くと、地磁気によって鉄片は磁化され磁石になります。

元の磁石との間に磁気力がはたらき、磁石は鉄片を吸引するのです。これと同じように静電気でも同じ現象が起こります。

(1) 静電誘導とは

図 7.3 に示すように、正の電荷をもった帯電体ＢをＡに近づけると、Ａには、近づけたＢと異種の電荷が現れます。このような現象を静電誘導作用といいます。

そして、正の電荷と負の電荷の間には引き合う力が働き、導体Ａは帯電体Ｂによって引きつけられます。このとき静電力が発生するのです。

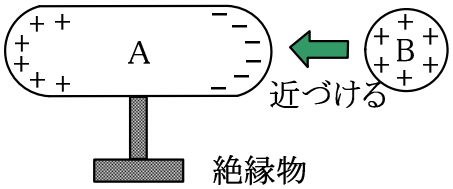


図 7.3

(2) 電磁誘導との違い

摩擦などによって電荷を与えたＢを物体Ａに近づけると､物体Ａでは、Ｂに近い側にＢと異種の電荷が、遠い側（反対側）にＢと同種の電荷が現れ、物体中のプラスとマイナス電荷のアンバランスが生じます。

この現象を静電誘導というのです。一方、磁気誘導とは磁石のＮ極とＳ極の間に鉄片をおいた場合に、この鉄片に磁石のＮ極に近い側にＳ極が、反対側（Ｓ極に近い側）にＮ極が誘導される現象をいいます。両作用には類似した点が多く見られます。

3. 電界とは

これは摩擦によって、物質内にプラスまたはマイナスの電気を帯びた電荷が発生し周りの空間が電気的な力を帯びるようになった空間を電界といいます。

電界の強さとは、電界中の点電荷にはたらく1〔C〕あたりの静電力をいい、その静電力の方向を電界の方向といいます。

4. 電気力線

(1) 電気力線とは

図 7.4 に示すように、電荷の周囲の空間に磁石の場合の磁力線に相当するものが存在するためと考えます。これを電気力線といい電気力線のある空間を電界と呼びます。

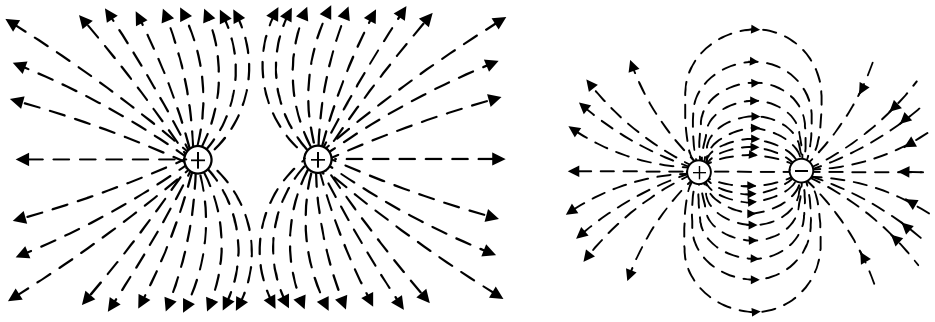


図 7.4

(2) 磁力線との違い

磁力線にもその性質があったように、電気力線にも次のような性質があります。

① 電気力線の方向は、その点の電界の向きと一致します。

② 電気力線は正電荷から出て負電荷に入ります。

③ 電気力線はそれ自身が短くなろうとする縮小性とお互いが反発しあう反発性を持ちます。

④ 電気力線に垂直な単位面積あたりを通る電気力線の数で、その点の電界の強さを表します。

⑤ 電気力線同士は交差しません。また導体には垂直に出入りし導体内部には存在しません。

静電誘導と電磁誘導を対比すると次のようになります。

力を及ぼしあう粒子	電　荷	磁　極
力の大きさ	$F \propto \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$〔N〕 距離の二乗に反比例する	$F \propto \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$〔N〕 距離の二乗に反比例する
及ぼしあう力	静電力	磁力

空間に生じる力	電気力線	磁力線
力のはたらく空間	電　界	磁　界
性質	（＋）の電荷から湧き出し（－）の電荷に吸い込まれる。どちらか一方しか存在しない場合は放射状になる。 空間（3 次元）的に存在する。	N 極から出発し S 極に向かって 1 本 1 本が輪ゴムのように必ず閉じていて自身で縮まろうとする性質がある。 空間（3 次元）的に存在する。
関係式	Q＝C･V〔C〕	$\Phi = L \cdot I$〔$\frac{Wb}{m}$〕

5.　静電容量とは

図 7.5(A)のように、2 枚の金属板を向かい合わせて、これに電圧を加えますと（＋）の電源が接続されている金属板には正の電荷が集まり、(－)の電荷が接続している金属板には負の電荷が集まり、互いに電荷が引き合うようにして、二枚の金属板に電荷が蓄えられることになります。このようなものをコンデンサといい電荷を蓄える性質をもった電気部品の一般的な名称として使われています。コンデンサに蓄えられる電荷Q は、これに接続する電圧Ｖに比例することが分かっていてこれを式にあらわすとつぎのようになります。

$$Q \propto C \cdot V \text{〔C〕} \qquad \text{式 7.1}$$

比例定数をＣで表すと

$$Q = C \cdot V \text{〔C〕} \qquad \text{式 7.2}$$

となります。この比例定数Ｃをコンデンサの静電容量といいます。

静電容量の記号には C を用い、単位はファラッド〔F〕と使います。また、電荷の単位にはクーロン〔C〕が用いられ、1〔C〕＝1〔F〕×1〔V〕になります。

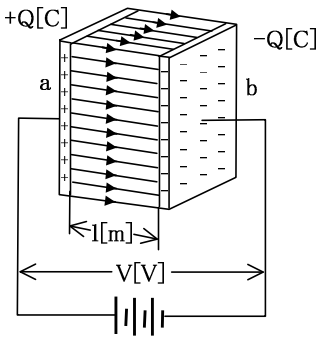


図 7.5(A)

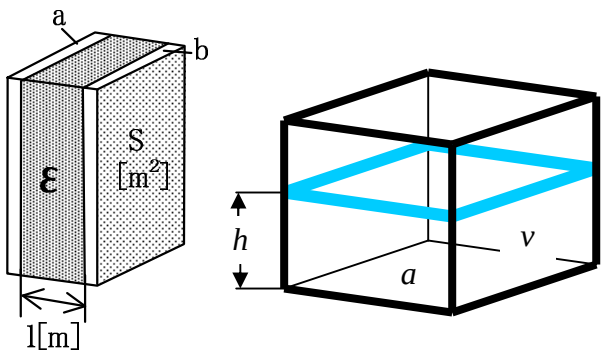


図 7.5(B)

上記の式は、コンデンサの静電容量と電圧、電荷との関係を表す大切な式です。

この式を水の量にたとえて考えてみると、次のように説明できます。図7.5(B)のように水槽の中の水量vが、容量の底面積aと高さhの積によって表されるように、電荷を蓄える容器を想像して、コンデンサに当てはめますと次のようになります。

v（水槽の水量）　-------> Q（コンデンサに蓄えられる電荷）
a（水槽の底面積）　-----> C（コンデンサの静電容量）
h（水槽の水位）　-----> V（コンデンサにかけられる電圧）
$v = a \cdot h$　-----> Q＝C･V〔C〕

つまり、コンデンサは、電荷を蓄えるために作られた容器と考えることができます。そこで、より大きな静電容量をもったもので、より小型にするため次のような点に重点をおいてコンデンサが使用されており

(1) 二枚の導体板間の距離を短くしたもの：代表的なものは電界コンデンサ
(2) 導体板の面積を大きくしたもの：フィルムコンデンサが代表的
(3) 導体間にマイカをいれたもの：磁気コンデンサなどがあります。

Q：電荷	単位［C］	クーロン
C：静電容量	単位［F］	ファラド
V：電圧	単位［V］	ボルト

先輩から一言！

第 6 章は、電気工学の基本になる磁力線や電荷の移動が磁界を作り、アンペールの右ネジ則が説明できることや、電磁力の発生メカニズムを図絵で説明しました。

電気の基本的な現象を説明していますので、よーく図絵を見ながら納得するまで学習して下さいね。

分からないところがあれば、必ず第 1、第 2 章に立ち帰って進んで下さい。

第 7 章は、静電界と静電容量の扱いを詳しく説明しましたが、この二つの章は、基本的な電気現象を理解する上でとっても大切ですから、極力、式を用いないで図絵を使った説明を行っています。

電気現象の理解に苦しんでいる人は、必ず、**第 1 章**及び**第 2 章**に立ち帰って、理解してから次に進んで下さい。**第 6 章**と**第 7 章**は、電気を理解する上でとても重要な現象を説明しています。

第２編

電気機器学入門

先輩から一言！

第２編は電気機器学として主に交流理論をまとめました。

第１編と同様に図絵を見ながら、交流の電気はどんな電気なのかを説明し、起電力の発生から電動機が回転する理由を説明しました。

図絵を見ながら交流の電気を学習するわけですから、指し示す指や矢印の方向には十分注視しながら読んで下さい。

もし分からないことが出たときは、必ず、第１編の基礎に立ち戻り物性や電気現象を復習してから先に進んで下さい。特に、第２編では磁力線の性質とファラディ･レンツの法則が大活躍します。今まで難しいと苦労した交流理論も、きっと「なーんだ、そーなんだ」と気がつくはずです。

第１章は、交流の電気の基本的な性質を学習するために発電機の起電力の方向や周波数、交流波形の見方、直流の電気との相違点を説明しました。交流の電気は電線の中をどのように流れているか、やさしく解説しました。

第２章は、少しボリュームがありますが、どのようにして交流が発生するかフレミングの右手則や回転電機子型交流発電機や単相交流発電機、三相交流発電機モデルを使って、丁寧に起電力の発生メカニズムと周波数を説明しています。また、誘導電動機が回転する原理を電磁力と回転磁界発生メカニズムを図絵で説明し、電動機が回転する仕組みを説明しています。

第３章は、交流の数式化を取り上げています。交流の電気の動き方を知るには､周期関数を知らないと理解できません｡ここでは詳しく説明しましたので、きっと、スラスラと理解できると思います。

第４章は、交流の電気の種類を取りあげ、単相交流と電流三相交流の電圧と電流を説明しています。良く質問される､「どうして三相なの」という問題にもやさしく説明しました。

きっと三相交流が大好きになるものと思います。

第５章は、交流の電気の表し方を説明しました！

交流の電気の大きさを表す種類の瞬時値、平均値、実効値や波形から見た種類を説明していますが、なぜ実効値を使うのか、についても詳しく書きましたので楽しく読んで下さい。その次は、本題となる交流の電気の位相や三相交流の相順、そして三相交流の接続方法と現れる電圧と電流の違い、三相変圧器の接続について説明をしています。

ここまでくると波形ばっかりと、ぼやきが出てきそうですが、ベクトルと合わせて考えて行くと納得して学習が進みます。

第 6 章は、交流の基本的な性質を説明しています。いよいよ交流抵抗のインピーダンスの出現ですが、ここも少しボリュームがあります。この章では、前章で説明した交流電流を制限する 3 人組（R、L、C）を電気回路に登場させ、ベクトルとともに電圧と電流の関係を説明しています。ここは大切ですから集中して取り組んで下さい。

第 7 章は、交流の電力と電力量を、波形を使って詳しく説明しています。交流の電力も 3 種類あって、この電力がどういうものか、よく図絵を見ながら学習下さい。

驚くことに仕事をしない電力は、仕事場から帰ってきていることが分かり、交流は非常に人間的な側面もあるのだなと感じます。最後は、電力と電力量の意味を書きました。

下世話な話ですが、エコロジーの時代ですから電気料金も書かせていただきました。

第　2　編　　もくじ

ページ

第１章　交流の電気の基本的な性質 ……1
　１．一般 ……1
　２．交流とは ……1
　３．直流の電気との相違点 ……5

第２章　交流の電気の発生 ……7
　１．なぜ交流の電気が発生するのか ……7
　　(1) フレミングの右手の法則による起電力の発生 ……7
　　(2) 交流起電力の発生 ……7
　　① 回転電機子型発電機の概念図及び簡略構造 ……7
　　② 交流起電力の発生原理 ……9
　　(3) 単相交流発電機 ……11
　　① 単相交流発電機の概略構造 ……11
　　② 発生電圧波形 ……11
　　(4) 三相交流発電機 ……11
　　① 三相交流発電機の簡略構造 ……12
　　②　発生電圧波形 ……12
　２．交流の電気は周波数がある ……12
　３．発電機の回転数と周波数の関係 ……13
　　(1) ２極交流発電機 ……14
　　(2) ４極の交流発電機 ……15
　　① P 極の交流発電機 ……15
　４．電磁力について ……15
　　(1) アンペールの右ねじの法則及び電流と磁束の関係 ……16
　　(2) フレミングの左手の法則 ……16
　　(3) 三相交流の回転磁界について ……17
　　① 同相電流によるコイルに発生する磁界 ……17
　　② 同相電流による回転磁界 ……17
　　③ 対称三相交流電源 ……18
　　④ 三相交流電源による回転磁界の発生 ……18
　　⑤ 三相誘導電動機の原理（例　２極の三相誘導電動機） ……20
　　⑥ 直流発電機の原理（参考） ……22

第３章　交流の数式化 ……24
　１．交流を数式で表す方法（単相交流で説明） ……24
　２．交流の表記方法 ……25
　　(1) 瞬時値表示（波形表示） ……26
　　(2) ベクトル表示 ……26

ページ

(3) 複素数表示 …… 27

第４章　交流の電気の種類 …… 28
１．単相交流 …… 28
(1) 単相交流波形 …… 28
(2) 単相交流回路 …… 28
(3) 単相交流の電圧と電流 …… 28
２．三相交流 …… 29
(1) 三相交流波形 …… 29
(2) 三相交流回路 …… 30
(3) 三相交流の定義 …… 31
(4) なぜ三相なのか …… 31

第５章　交流の電気の表し方 …… 33
１．交流の大きさの表し方 …… 33
(1) 基本事項 …… 33
(2) 一般事項 …… 33
① 最大値 …… 33
② 平均値 …… 34
③ 実効値 …… 34
２．各種交流の大きさの表し方 …… 35
(1) 基本事項 …… 35
① 条件 …… 35
② 特性値 …… 36
③ 交流波形例 …… 36
３．位相とは何か …… 37
４．三相交流の相順と位相 …… 40
５．三相のつなぎ方 …… 40
(1) Ｙ結線の考え方 …… 40
(2) Δ結線の考え方 …… 41
(3) 実際の結線 …… 41
① 電源の結線方式 …… 42
② 負荷の結線方式 …… 42
６．三相接続における電圧と電流の現れ方の違い …… 43
(1) Ｙ－Ｙ結線 …… 43
① 回路図 …… 43
② 電圧ベクトル図 …… 43
(2) Ｙ－Ｙ結線における電圧と電流の考え方 …… 44
① 回路図 …… 44

ページ

② ベクトル図 …… 44
(3) Δ－Δ結線 …… 45
① 回路図 …… 45
② ベクトル図 …… 45
(4) Δ－Δ結線における電圧と電流の考え方 …… 46
① 回路図 …… 46
② ベクトル図 …… 46
(5) V－Δ結線 …… 47
① 回路図 …… 47
② ベクトル図 …… 47
(6) V－Δ結線における電圧と電流の考え方 …… 48

第６章　交流の基本的な性質 …… 49
１．交流の抵抗には３つの種類がある …… 49
(1) 直流抵抗 …… 49
(2) 交流抵抗（X_L：誘導性リアクタンス） …… 49
(3) 交流抵抗（X_C：容量性リアクタンス） …… 50
(4) ３つをベクトル的に合成したインピーダンス（Z〔Ω〕） …… 51
２．交流の電気を抵抗、誘導性リアクタンス容量性リアクタンス
に流したときの電圧と電流の関係 …… 53
(1) 直流回路 …… 53
① RL 直列回路 …… 53
② RC 直列回路 …… 53
③ RLC 直列回路 …… 53
(2) 並列回路 …… 54
① RL 並列回路 …… 54
② RC 並列回路 …… 54
③ RLC 並列回路 …… 54

第７章　交流の電力と電力量 …… 55
１．交流の電力には３種類ある …… 55
(1) 電圧と電流が同相の場合の電力波形 …… 55
(2) 電流が電圧より $\frac{\pi}{2}$ 遅れている場合 …… 56
(3) 電流が電圧より $\frac{\pi}{2}$ 進んでいる場合 …… 57
(4) 電流が電圧より θ 遅れている場合 …… 58
(5) 電流が電圧より θ 進んでいる場合 …… 59
２．皮相電力とは何をする電力 …… 60

ページ

(1) 皮相電力、有効電力及び無効電力の関係 …… 60
(2) 電力から見た実効値 …… 60
3．有効電力とは何をする電力 …… 61
4．無効電力とは何をする電力 …… 62
5．電力の計算式 …… 62
(1) 平衡三相交流回路の三相電力の計算式 …… 63
6．力率とは …… 66
7．力率の考え方 …… 66
(1) 力率の意味について …… 67
(2) 力率改善について …… 67
① 設備の有効利用を図る …… 67
② 電気料金の優遇 …… 67
8．交流の電力量 …… 67
9．電力と電力量について（補足） …… 68

第１章　交流の電気の基本的な性質

１．一般

交流は、水力・火力・原子力発電所で発電され、変電所で電圧を変えて、送・配電線により一般家庭の電灯・コンセント電源、ビルや工場などの電灯・動力電源として使用されています。

以前は、電動機の回転数・トルク制御といえば直流電動機がほとんどでしたが、最近ではインバータ技術の進歩により、交流の電圧・周波数を自由に変更することが可能になり、負荷の特性に合わせて、三相誘導電動機、同期電動機の回転数・トルク制御を行うことができるようになりました。

このように、インバータ技術により交流の電圧・周波数を自由に変更することが可能になり、次のような特性を持った電源として交流の用途が大きく広がってきました。

- 電圧や周波数が可変できる VVVF（可変電圧・可変周波数, variable voltage、variable frequency ）制御
- 電圧や周波数を一定にできる CVCF（定電圧・定周波、constant voltage、constant frequency）制御
- 電圧を可変し、周波数を一定にできる VVCF（可変電圧・定周波）制御
- 電圧を一定にし、周波数を可変にできる CVVF（定電圧・可変周波数）制御

尚、直流は、乾電池、携帯電話・デジタルカメラ・デジタル音楽プレイヤ・ノートパソコンなどのバッテリ、自動車のバッテリ、太陽電池パネル等に広く使用されています。

２．交流とは

交流について、一般家庭で使用されている AC 100〔V〕 50／60〔Hz〕を例に説明します。

(1) AC とは、Alternating Current の略語で、日本語では交流です。

(2) 交流とは、時間の経過とともに大きさと向きが周期的に変わる電圧または電流をいい、100〔V〕は電圧を表しています。

(3) 50〔Hz〕/60〔Hz〕は周波数といい、単位時間（1 秒間）に向きが周期的に変化する回数を表しています。また、周波数の単位は〔Hz：ヘルツ〕で量記号は f で表します。なお、日本では、50〔Hz〕と 60〔Hz〕の周波数が採用されていますが、船舶は、特殊な場合を除いて 60〔Hz〕が採用されています。

(4) 電圧や電流の時間的変化の形状を波形といい、交流の代表的な波形は正弦波で、一定の規則性を持っています。

(5) 図 1.1 に一般家庭のコンセントから得られる 100〔V〕の交流電圧(単相・正弦波)を示します。

なお、交流は 1/2 周期毎に向きが変るため、その向きを矢印（→／←）

で表記します。また、図中、表から裏に向かって流れる交流は「×」で、裏から表に向かって、流れる交流は「●」で表記します。

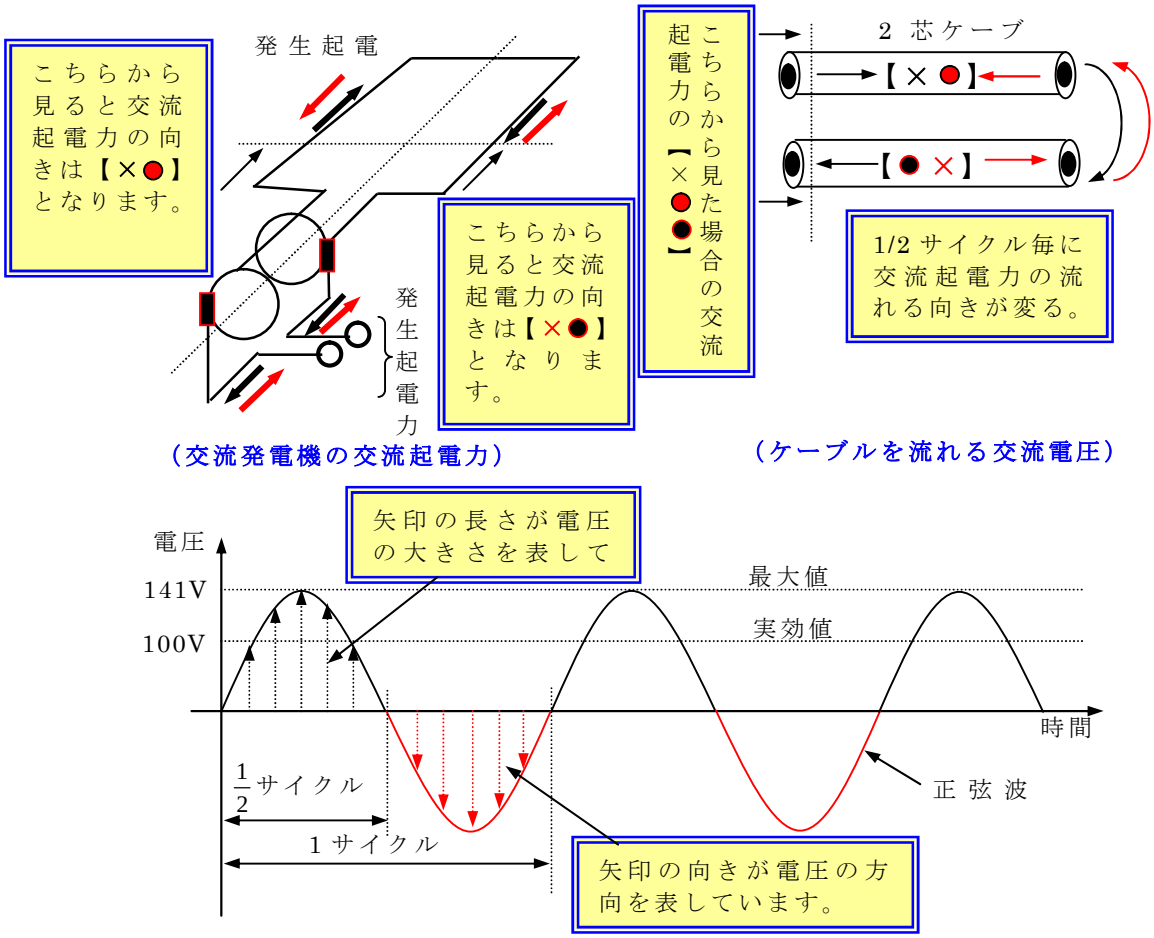


図 1.1

【交流の向き】

図 1.1 の矢印は、交流の大きさ及び向きが、$\frac{1}{2}$サイクル毎に変ることを表しています。

(6) 100[V]の交流電圧とは、実効値が 100[V]ということで、交流の最大値（141[V]）ではありません。

【実効値】

交流は、図 1.1 の様に、電圧の大きさが一定周期で変わり、瞬間の値も刻々と変化します。その交流が行なう仕事を直流と同じとして、交流の電気的効果を表わすのが実効値なのです。　実効値＝$\frac{最大値}{\sqrt{2}}$

(7) 図 1.2 の様に、交流が周期的に変化することをサイクル、また、1 秒間のサイクル数を周波数といいます。
なお、
① 1 サイクルに要する時間を周期といいます。

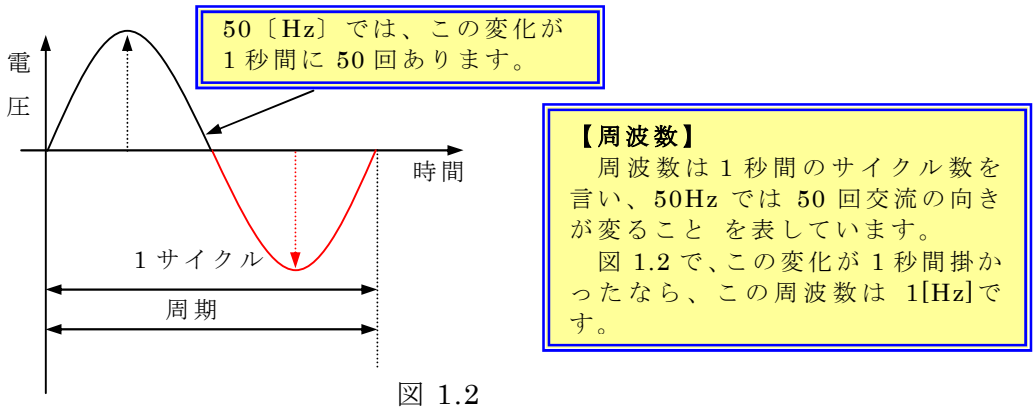


図 1.2

② 周波数とサイクル数の関係は、図 1.3 のようになります。

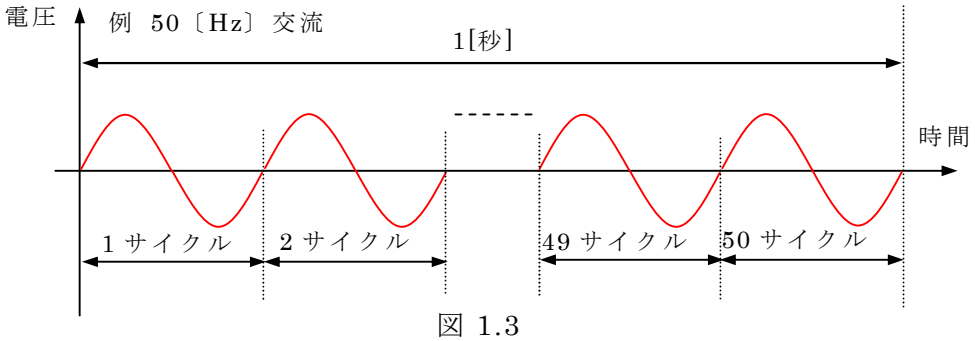


図 1.3

(8) 交流は、周波数（周期）が同じでも、図 1.4.1 のように幾つかの波形が重なり合っている状態があります。この個々の波を相（phase）と言いい、一般家庭の電気は一つの波しかありませんから単相（single phase）といい、工場等の電気は三つの波なので、三相（3 phase）といいます。

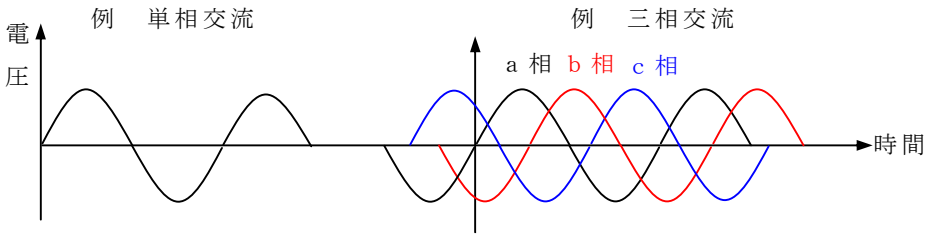


図 1.4.1

なお、交流波形の時制は、図 1.4.2 のようになります。

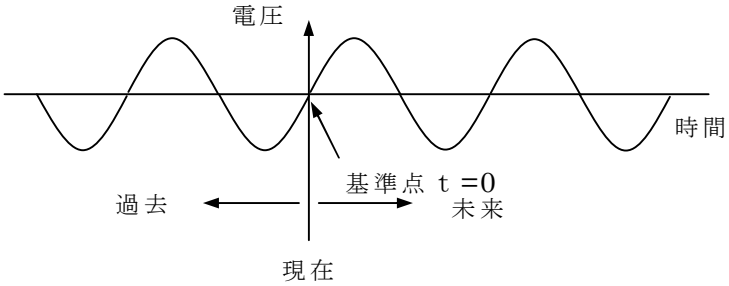
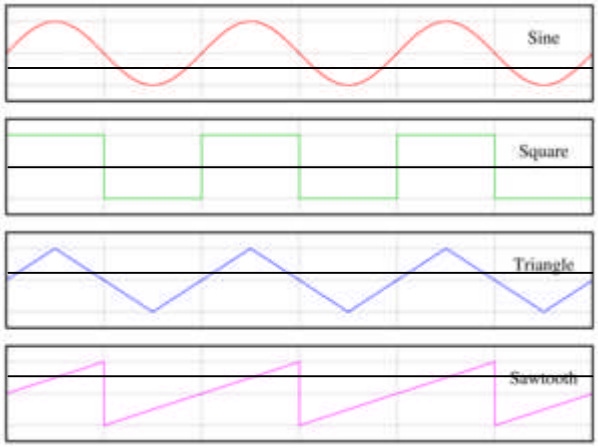


図 1.4.2

(9) 交流の代表的な波形は正弦波で、狭義の交流は正弦波を指しますが、広義には任意の波形を指し、特に正弦波である必要はありません。図 1.5 に交流の色々な波形を示します。



（正弦波）
（矩形波）
（三角波）
（鋸歯状波）

図 1.5 色々な交流波形

また、交流は時間に対して一定の周期で変動すると記述しましたが、図 1.6 に示す音声信号の様に複雑に変動する波形も交流の一種類で、脈流と言います。

音楽では、電圧の大きさが音の大きさを、波の形が音色を表します。

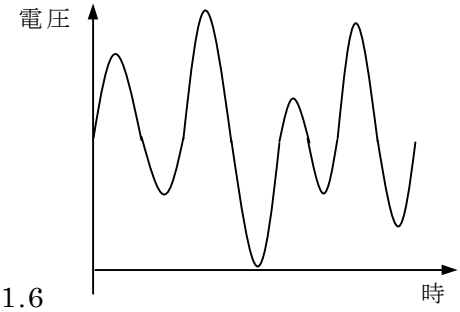


図 1.6

なお、電圧・電流の波形について纏めると図 1.7 のようになります。

種類	大きさ	方向	用途
直流	常に一定	常に一定	電池
脈流	常に変化	常に一定	音声
交流	周期的に変化	周期的に変化	一般家庭・工場

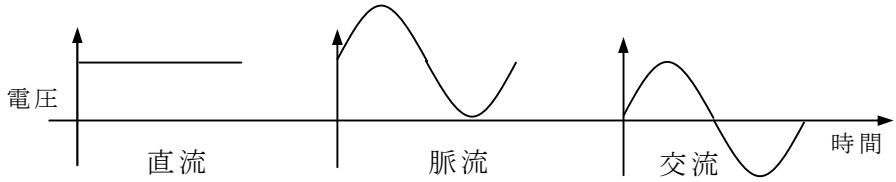


図 1.7

3．直流の電気との相違点

交流と直流の違いは、次の様になります。

(1) 直流は DC の記号で表し、Direct Current の略称で、交流の対義語となっています。

(2) 交流は時間の経過とともに大きさと向きが周期的に変わるのに対して、直流は、図 1.8 の乾電池の電圧ように電圧は一定で、電流は一方向にのみに流れます。

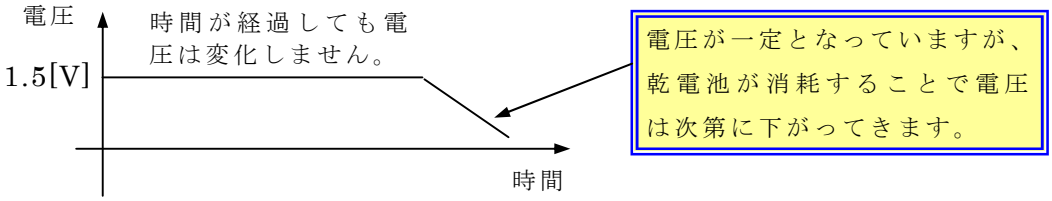


図 1.8

(3) ケーブルの中を流れる電流の交流と直流の相違点は、図 1.9 になります。

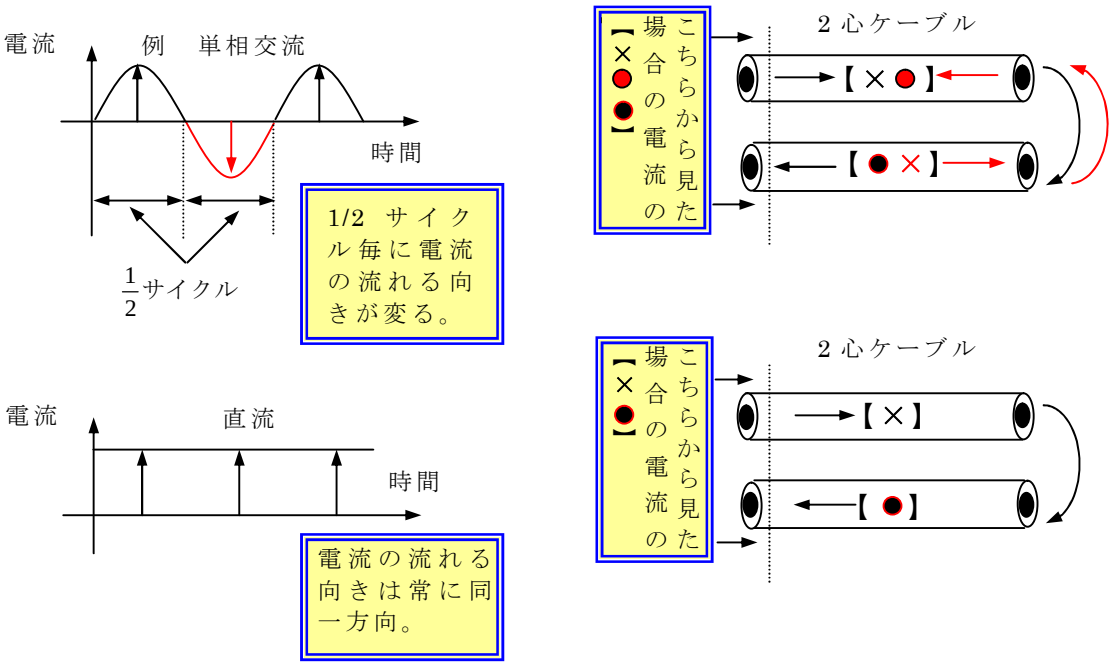


図 1.9

(4) 直流は、電圧が一定のため電圧の上げ下げや変圧ができませんが、交流は電圧の大きさを変圧器によって容易に変更することができるため、遠くの発電所から高電圧で送電し、家庭や施設の近くで電圧を下げて、電気を利用できことができます。

図 1.10 は、交流電圧の変更過程を表しています。（図 1.10 は参考例で、各地域の送・配電系統によって異なります。）

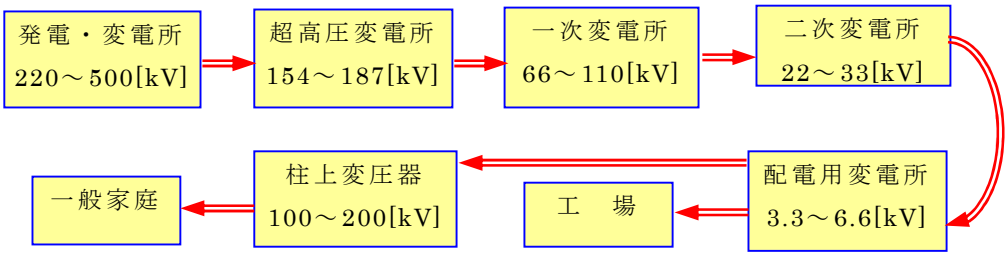


図 1.10

(5) 直流は、日本全国の何処でも乾電池は 1.5[V]、自動車用バッテリは 12[V]と決まっていますが、交流の周波数は図 1.11 のように静岡県浜松市より西（西日本）では 60[Hz]、東（東日本）では 50[Hz]となっており、対象地域でしか使えない製がある場合があります。
最近の電化製品ではインバータという周波数を自在に変換する装置が装着されていることが多いので心配は少なくなりました。

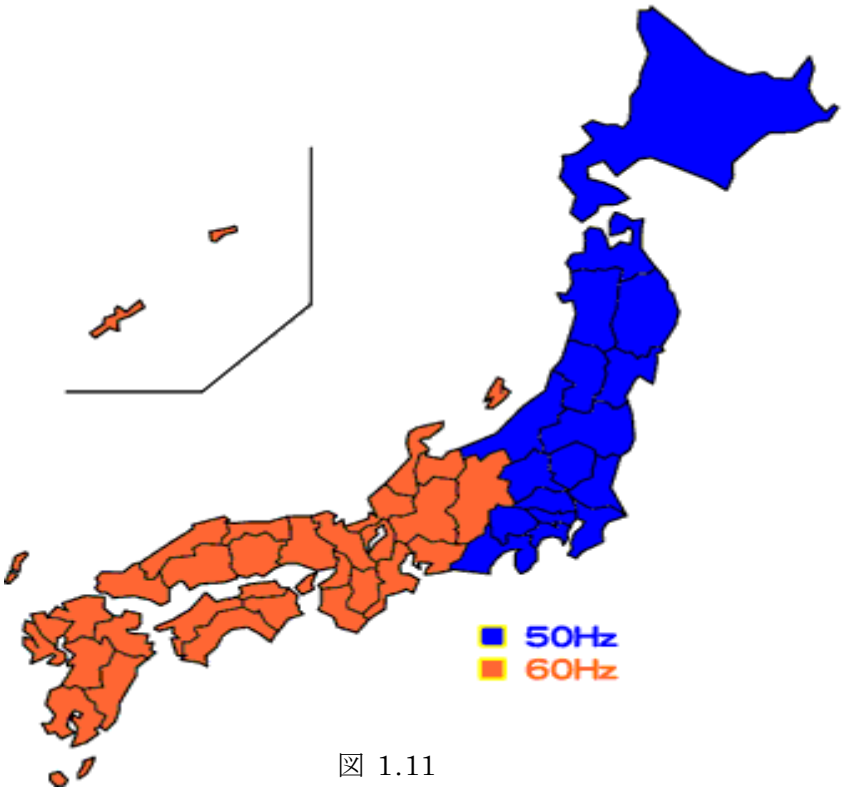


図 1.11

第２章　交流の電気の発生

１．なぜ交流の電気が発生するのか

(1) フレミングの右手の法則による起電力の発生

図 2.1 のように磁界中で導体を移動させると、フレミングの右手の法則により導体には裏から表に向かって起電力が発生します。

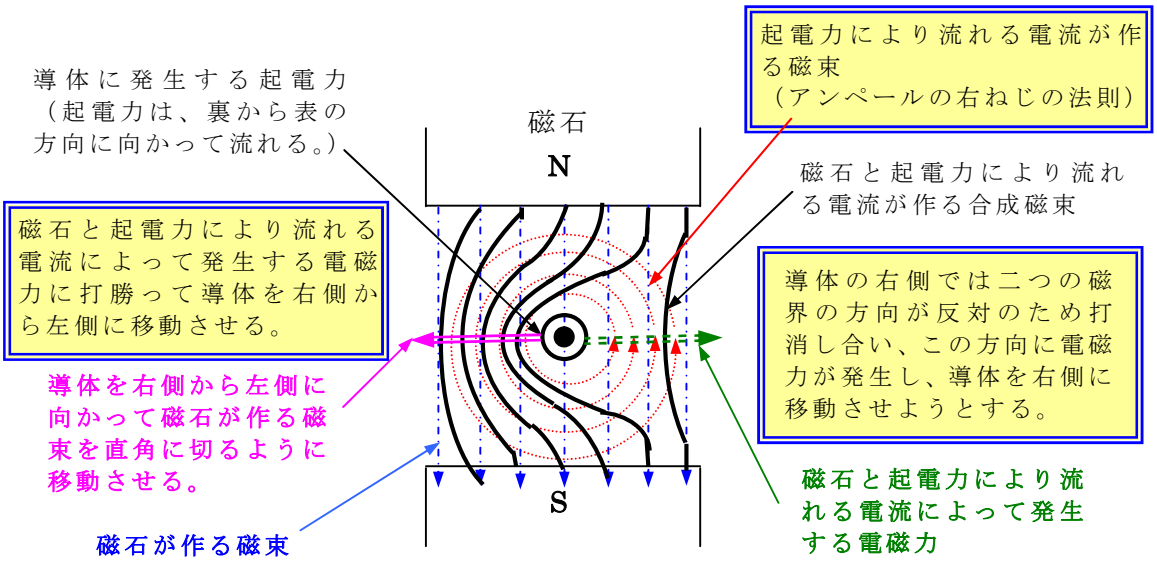


図 2.1

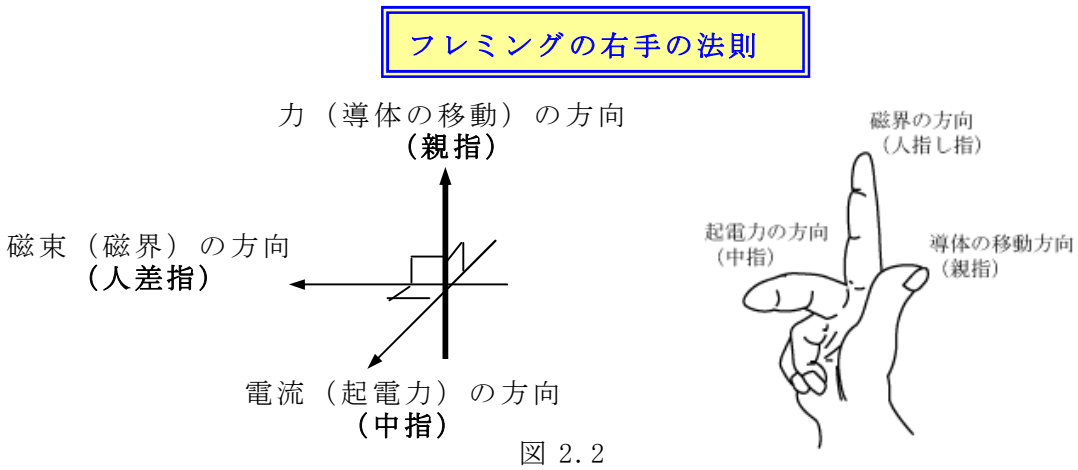


図 2.2

(2) 交流起電力の発生

交流起電力は、図 2.3 のように磁石の中にコイルをおいた状態で、コイルを一定の回転数で回転させコイルを貫く磁束数を変化させることで、規則正しく変化する正弦波交流起電力が発生します。

①回転電機子型発電機の概念図及び簡略構造

発電機には、交流起電力が発生する電機子を回転させる回転電機子型と磁束を作る界磁を回転させる回転界磁型があり、図 2.3 に回転電機子型発電機の概念図を、図 2.4 に簡略構造を示します。

磁界中でコイル（黒、赤色）を移動させると、電磁誘導の法則によって導体に電流が発生（誘起）されます。その方向はフレミングの右手の法則により説明されます！

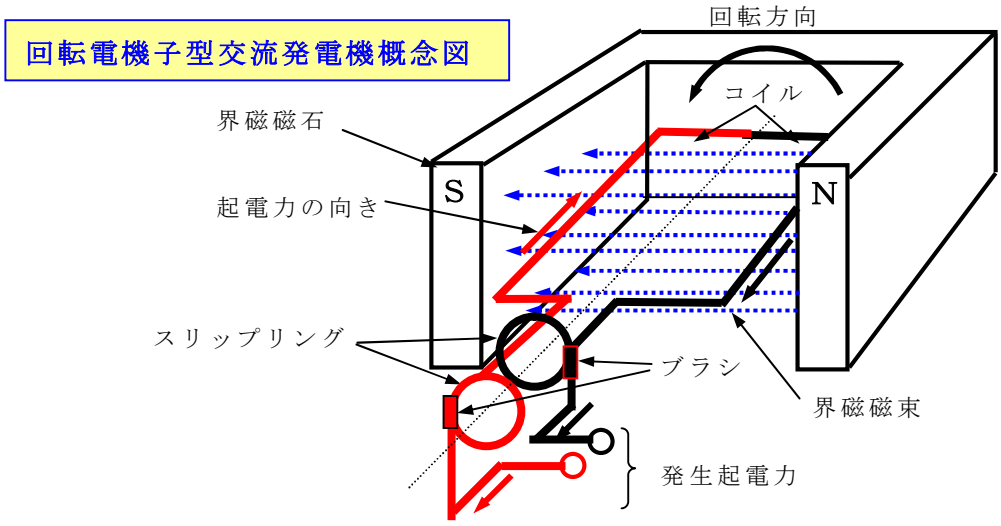


図 2.3

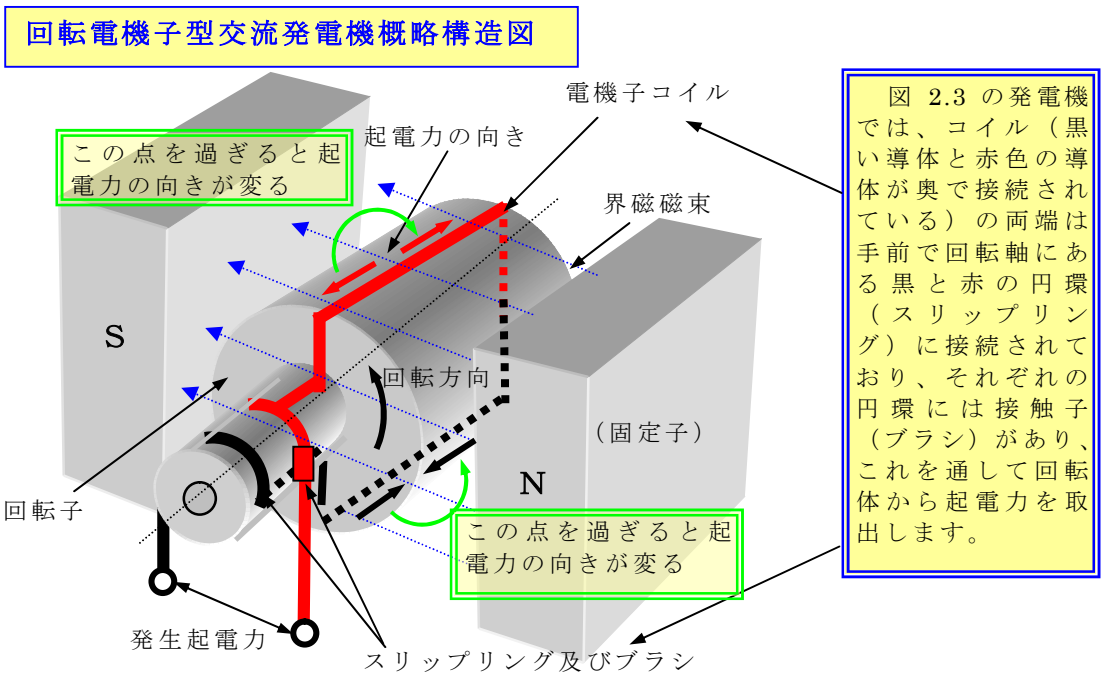


図 2.3 の発電機では、コイル（黒い導体と赤色の導体が奥で接続されている）の両端は手前で回転軸にある黒と赤の円環（スリップリング）に接続されており、それぞれの円環には接触子（ブラシ）があり、これを通して回転体から起電力を取出します。

図 2.4

【発生起電力】

導体に発生する起電力の大きさは磁界の強さと、磁界の向きと直角方向に導体が移動する速度に比例します。

発電機のコイルは磁界中で円運動をしますので、導体の磁界に対する直角方向の移動は図 2.3 において上下方向の移動になります。

従って、起電力の大きさはコイルが垂直の時には零で、水平のときが最大になります。

② 交流起電力の発生原理

図 2.5 に、コイルの回転角度により変化する交流起電力の発生過程を示します。コイルには、一定速度で反時計方向に回転することにより、コイルを貫く磁束数が絶えず変化して、交流起電力が発生します。

> 図 2.5-1 から図 2.5-5 で説明する発電機では、導体が上方向に移動するときと、下方向に移動するときでは導体に誘起される電流の方向が逆転しますので、導体から電気を取り出すときに半回転毎に電流の方向を切り替えて、外部に流れる電流の方向を一定の方向にするスリップリング（整流子）が必要です。

交流起電力の発生過程

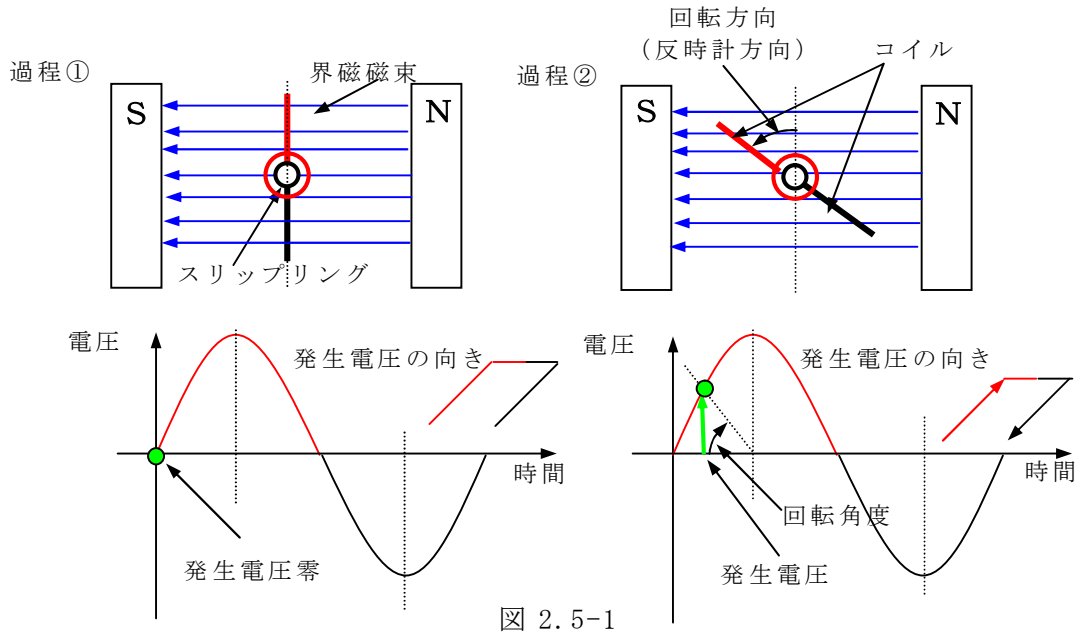


図 2.5-1

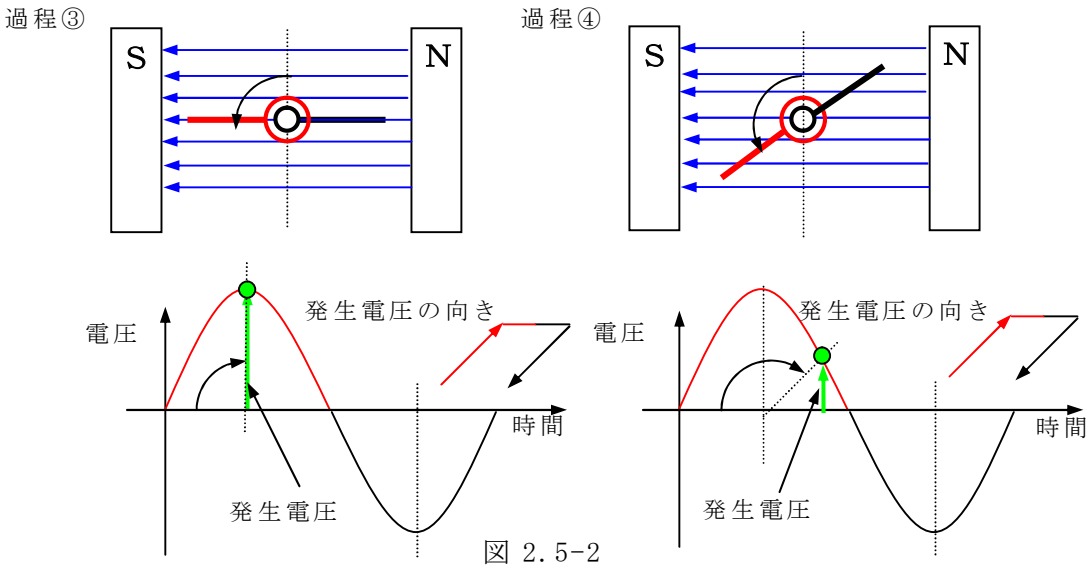


図 2.5-2

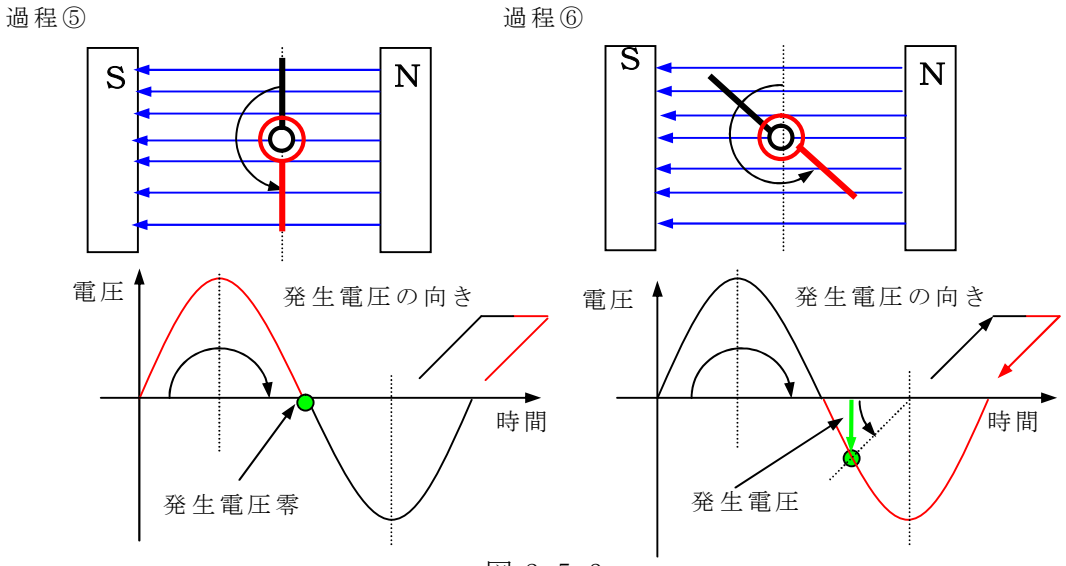


図 2.5-3

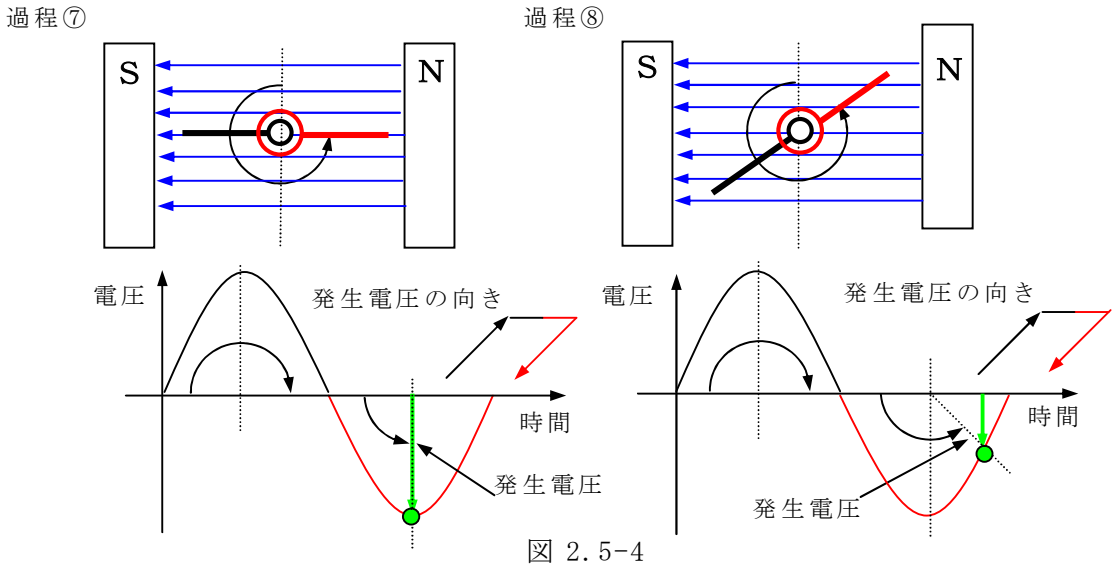


図 2.5-4

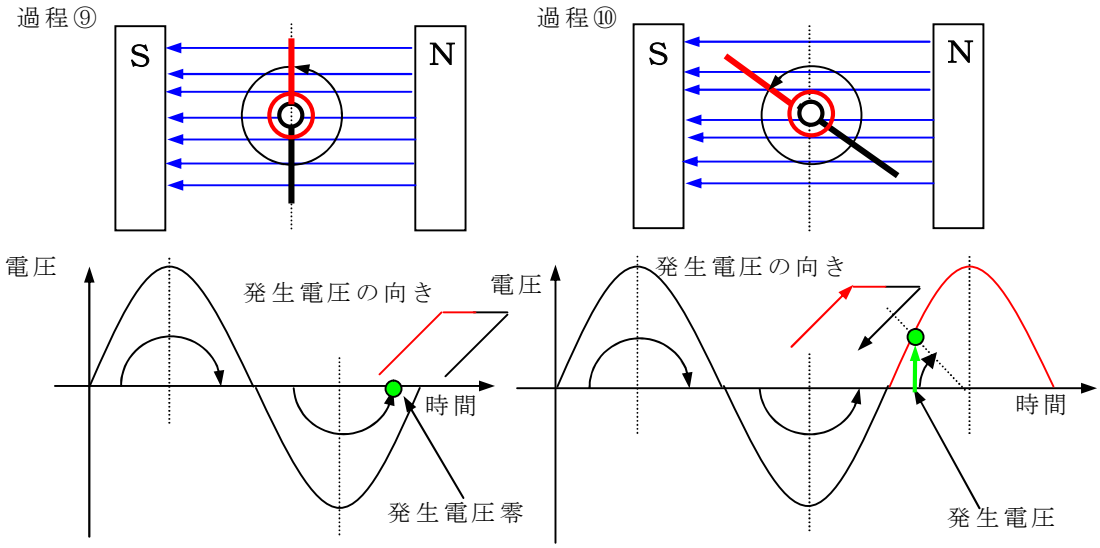


図 2.5-5

(3) 単相交流発電機（1phase Alternator）

図 2.6 の様な電機子コイルを回転（回転電機子型）させて単相交流を発生させます。（界磁コイルを回転（回転界磁型）させる回転界磁型の単相交流発電機でも同様です。

① 単相交流発電機の概略構造

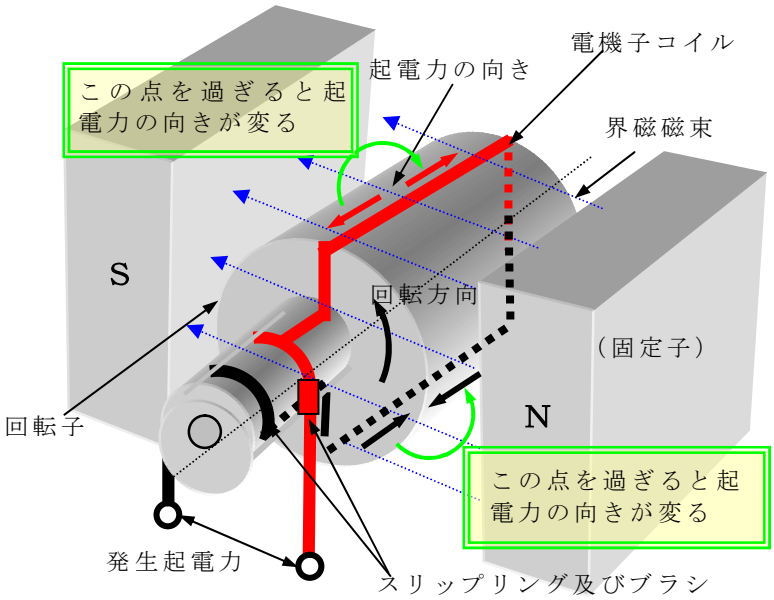


図 2.6

②発生電圧波形

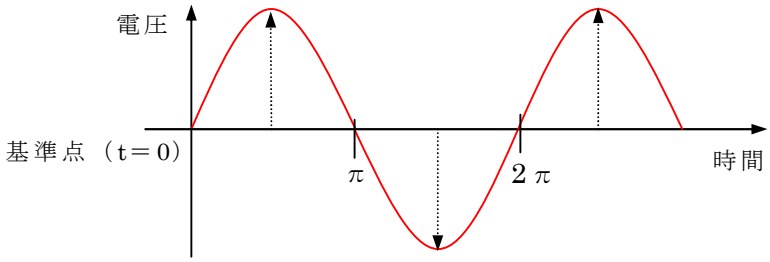


図 2.7

(4) 三相交流発電機（3 phase Alternator）

図 2.8 の様な電機子コイルを回転（回転電機子型）させて三相交流を発生させます。

この発電機では、3 組のコイル（黒色、赤色、青色コイル）の 1 端は一括して回転軸にある紫色の短絡環に接続され、もう一方の端は、黒色、赤色及び青色の円環（スリップリング）に接続されています。赤色、青色及び青色の円環には接触子（ブラシ）があり、これを通してコイルから起電力を取り出します。

3 組のコイルは異なる角度（この場合は各 120 度）で配置されています

ので、図 2.9 のような周波数は同じですが位相が異なる（この場合は各 120 度）起電力が発生します。

① 三相交流発電機の簡略構造

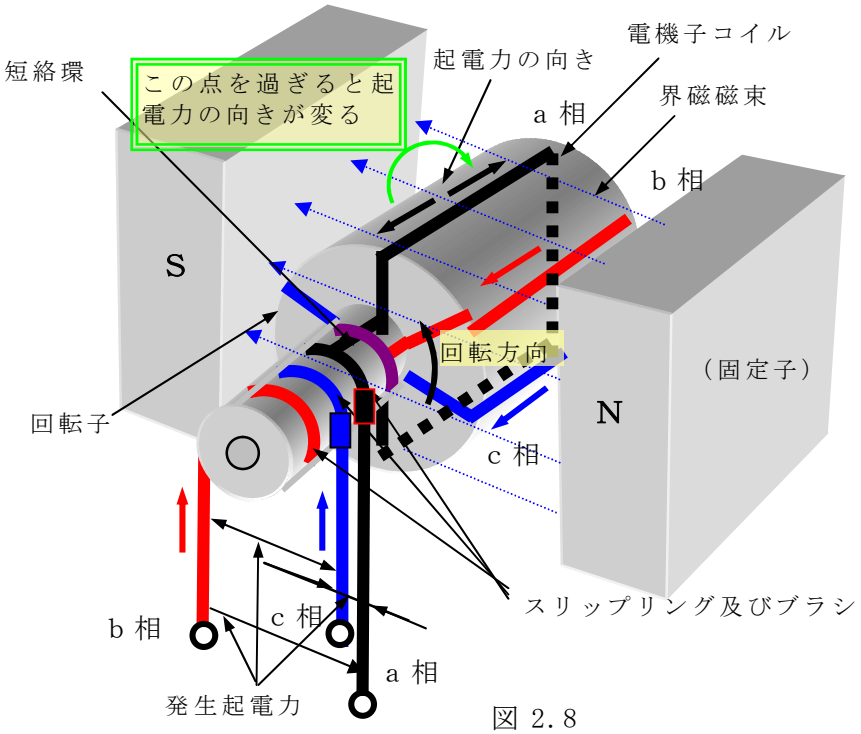


図 2.8

② 発生電圧波形

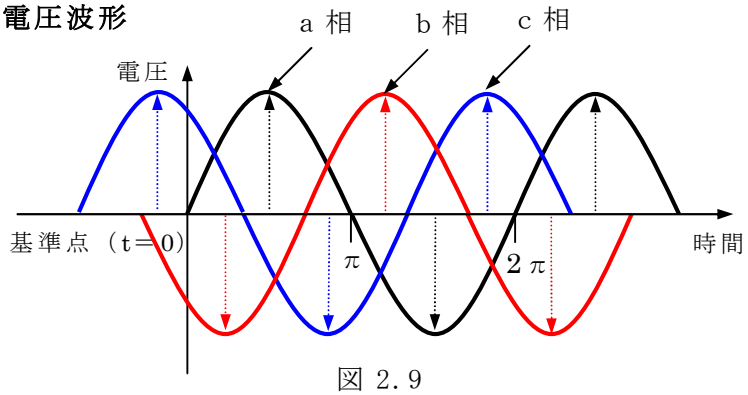


図 2.9

この 3 つの波の瞬間と瞬間の値の総和はいつも零になりますので、電気を送るのに 3 本の電線で送ることが出来ます。このような電気の送り方を三相 3 線式といい、一般に送電線や配電線にはこの方式が使用されています。

2．交流の電気は周波数がある

図 2.10 において、コイルが回転する速さを 1 秒間に回った回数で表したものが周波数で、単位は[Hz：ヘルツ]で量記号は f で表します。

また、1 秒間に回った角度で表す場合は角周波数と言い、単位は[rad/s]で量記号は ω（オメガ）で表します。

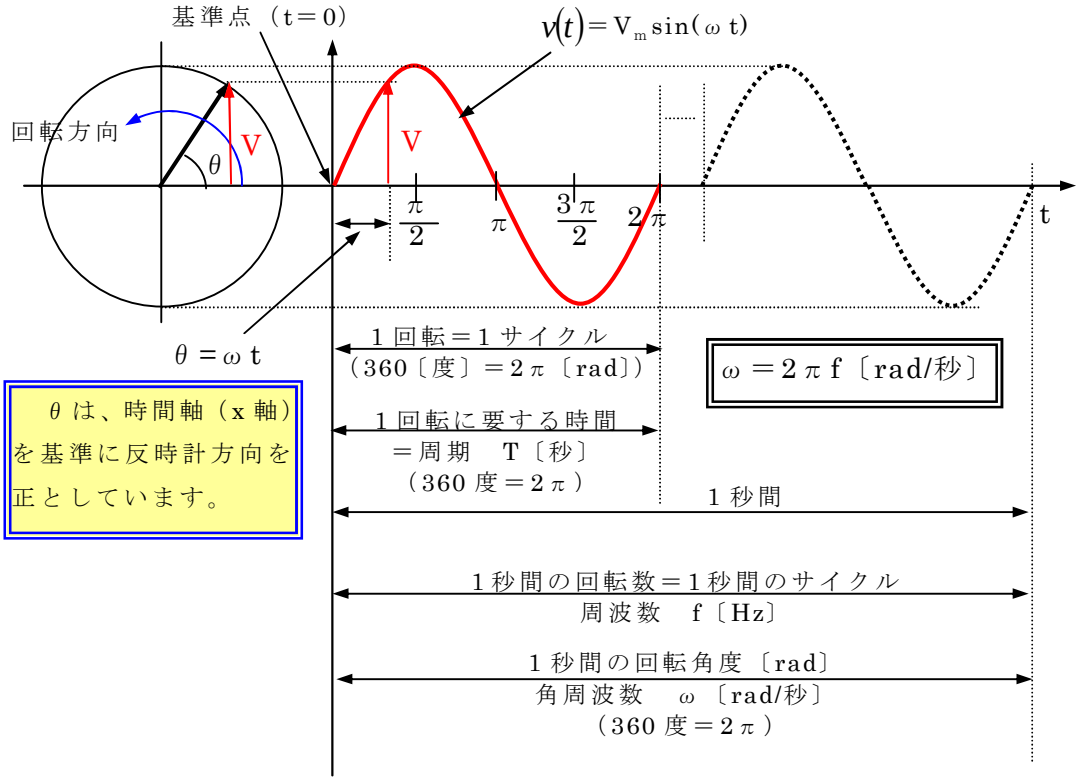


図 2.10

3．発電機の回転数と周波数の関係

発電機の回転数と周波数の関係について、2 極／4 極の回転界磁型交流発電機による単相交流で説明します。

【回転界磁型交流発電機】

電機子コイルを固定し、界磁を回転させる方式でスリップリングとブラシが不要となり構造が簡単になります。

一般的には、発電機本体と同一軸上に交流励磁機と回転整流器を装着させた図 2.11 のようなブラシレス発電機と呼ばれる回転界磁型の発電機が使用されています。

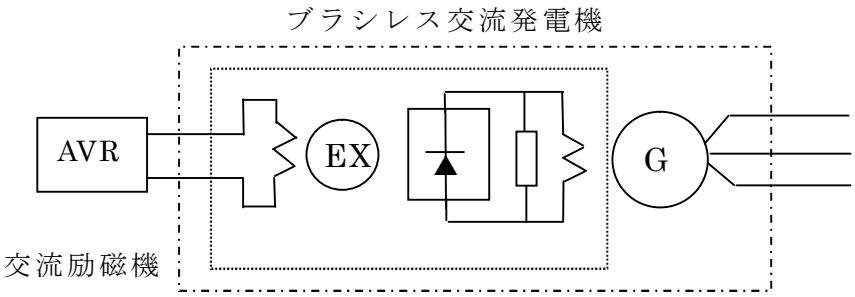


図 2.11

(1) 2 極交流発電機

図 2.13 のように 2 極（N と S の磁極組合せが一対）の磁石を 1 回転させる毎に 1 サイクルの起電力を発生し、毎秒 60 回転の速さで回転させれば 60Hz の交流を発生させることができます。

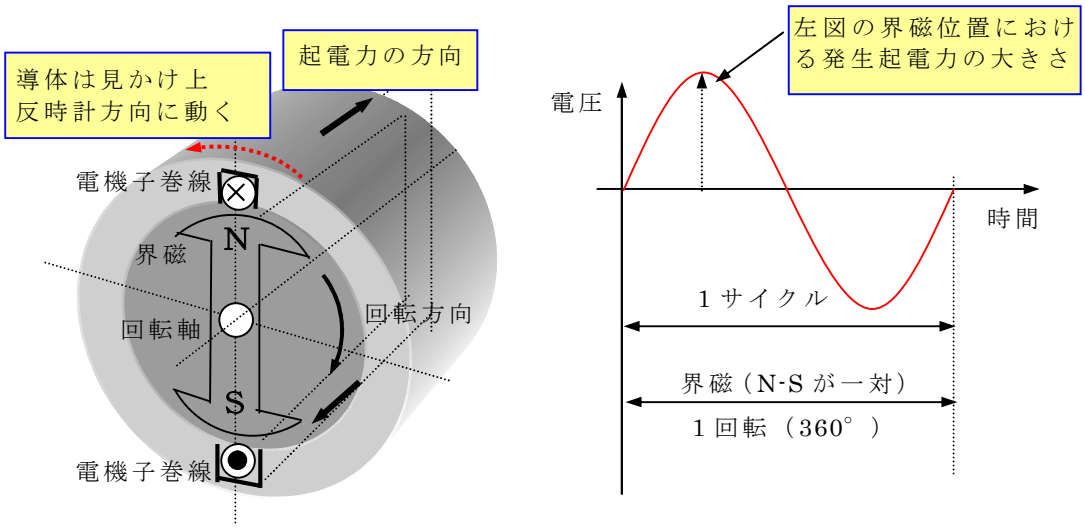


図 2.12

> 2 極の場合、60Hz の周波数を発生させるためには、界磁が 1 秒間に 60 回転する必要があり、1 分間に 3600 回転しなければならない。

なお、2 極の回転界磁型交流発電の機概念図は、図 2.13 のようになります。

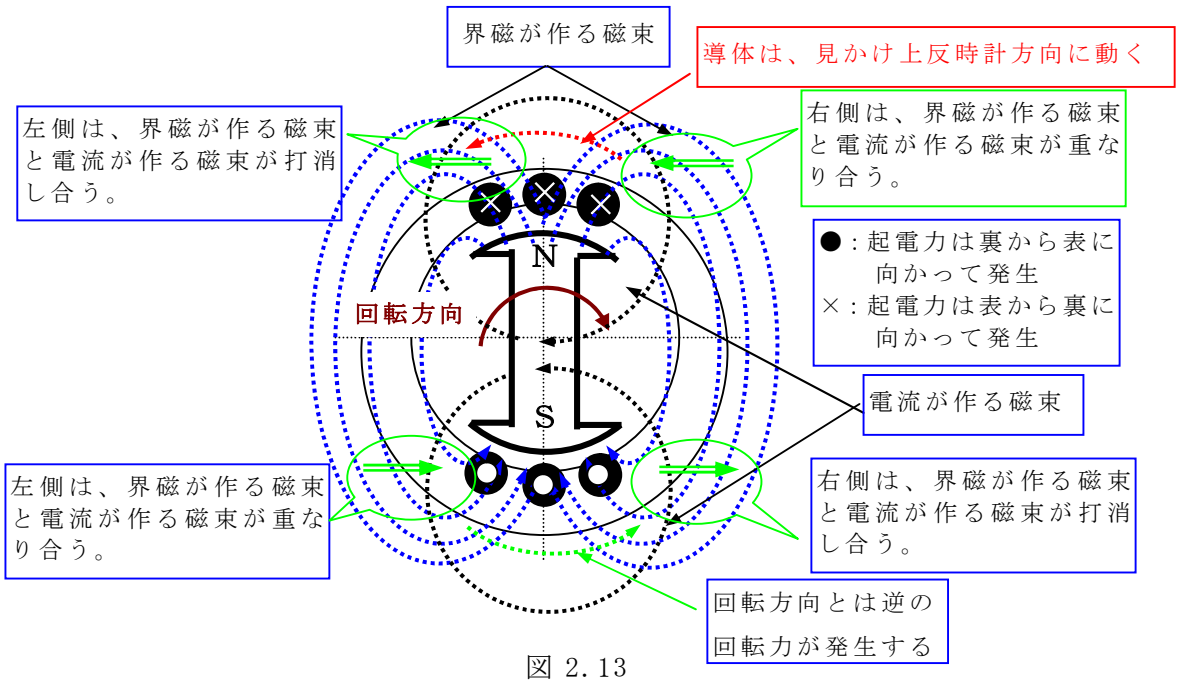


図 2.13

(2) 4 極の交流発電機

図 2.14 のように 4 極（N と S の組合せが二対）の磁石を 1 回転させる毎に 2 サイクルの起電力を発生し、毎秒 30 回転の速さで回転させれば 60Hz の交流を発生することになります。

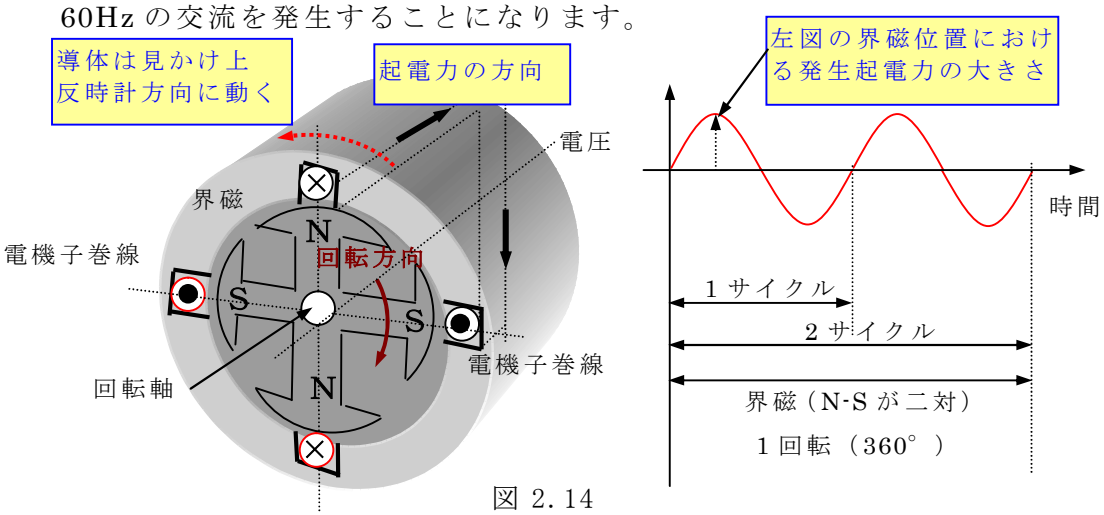


図 2.14

4 極の場合、60Hz の周波数を発生させるためには、界磁が 1 秒間に 60 回転する必要があり、1 分間に 1800 回転しなければならない。

①P 極の交流発電機

一般に交流発電機の極数を P、周波数を f〔Hz〕、毎分回転数を Ns〔m^{-1}〕とすると、関係は次のようになります。

$$Ns = \frac{120\ f}{P}\ 〔m^{-1}〕 \quad \Rightarrow \quad 毎分回転数 = \frac{120 \times 周波数}{極数}\ 〔m^{-1}〕$$

（注）毎分回転数 Ns は、交流発電機の極数と周波数で定まる一定の回転数で、同期速度といいます。

4．電磁力について

界磁が作る磁束と電流が作る磁束によって発生する電磁力は、図 2.15 のようになります。

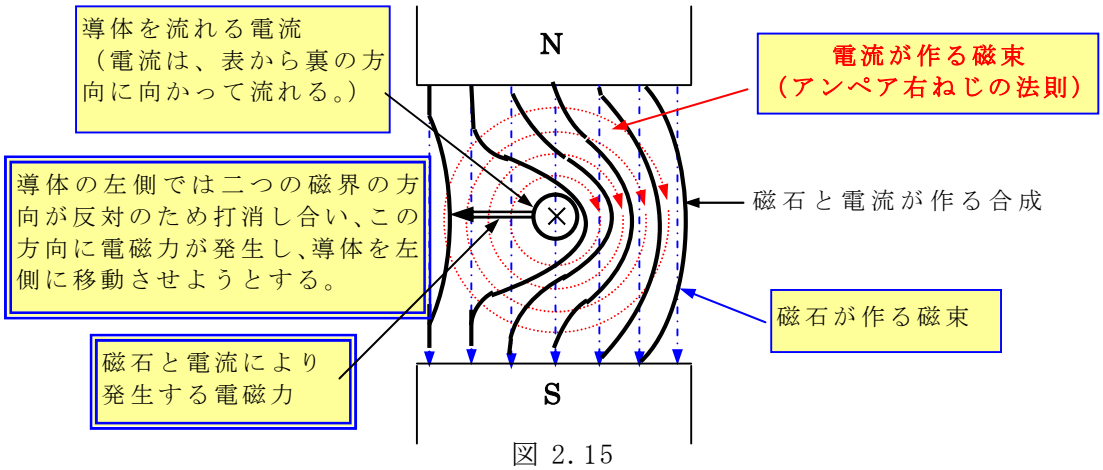


図 2.15

図 2.15 のように 1 点鎖線で示す固定磁界の中に導体を置いて表から裏方向に向かって電流を流すと、導体の周辺には電流によって図の点線のように右回りの磁界が発生する。その原理は図 2.16 に示すアンペールの右ねじの法則に従い、磁界が導体を右周りに一周する。

これを使って最初の磁界と導体の磁界を合成すると図 2.16 のように導体の左側では二つの磁界の方向が反対であるので打ち消し合い、右側では同方向であるので重なっていくことになる。その結果、合成磁界は実線で示すように左側は磁束が少なくなり、右側は磁束が多くなってねじれ形の磁界になる。磁束はゴムのように直線を求めるので、右側は直線を目指して導体を左側に移動させようとする力を導体に与える。これが電磁力である。

(1) アンペール右ねじの法則及び電流と磁束の関係

導体に電流が流れると、その導体のまわりに発生する磁束（磁力線）は、図 2.16 のようになります。

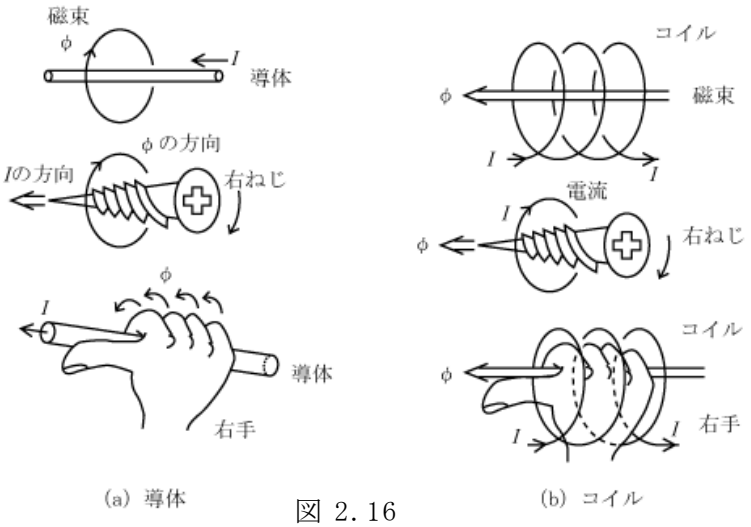


図 2.16

(2) フレミングの左手の法則

磁界中を移動する導体に誘起される起電力の向きは、「フレミングの右手の法則」によりますが、磁界中に置かれた電流が流れる導体が受ける電磁力の向きは、図 2.17 のように「フレミングの左手の法則」によります。

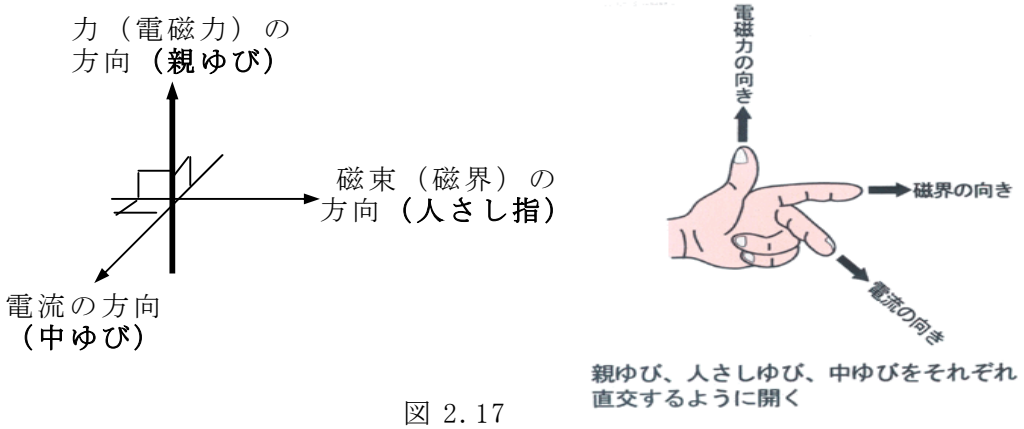


図 2.17

(3) 三相交流の回転磁界について

同一仕様の３個のコイル a、b、c を用意し、図 2.18 のように a 相コイルより時計回転方向に 120° ずれた位置に b 相コイルを、更に b 相コイルより時計回転方向に 120° ずれた位置に c 相コイルをそれぞれ配置し、各軸に図示の方向の電流を流した場合、各相コイルによる磁界ベクトルは図 2.18 のようになります。

各相コイルに同相の電流を流した場合は、各軸電流と磁界の関係は図 2.19 となり、各相コイルの磁界ベクトルによる合成磁界はすべての位相(時間)で「零」となり、磁界は発生しません。

しかし、３個のコイルを図 2.20 のように相順 a、b、c の三相電源に接続し、そこに対称三相交流電圧を加えると、コイルの電流は大きさが同じで、位相差が 120° の対称三相交流となるので、各相コイルによる合成磁界は、図 2.21 のようになり、磁界の大きさ及び回転速度が一定で、電流１サイクルについて１回転する回転磁界となります。

① 同相電流によりコイルに発生する磁界

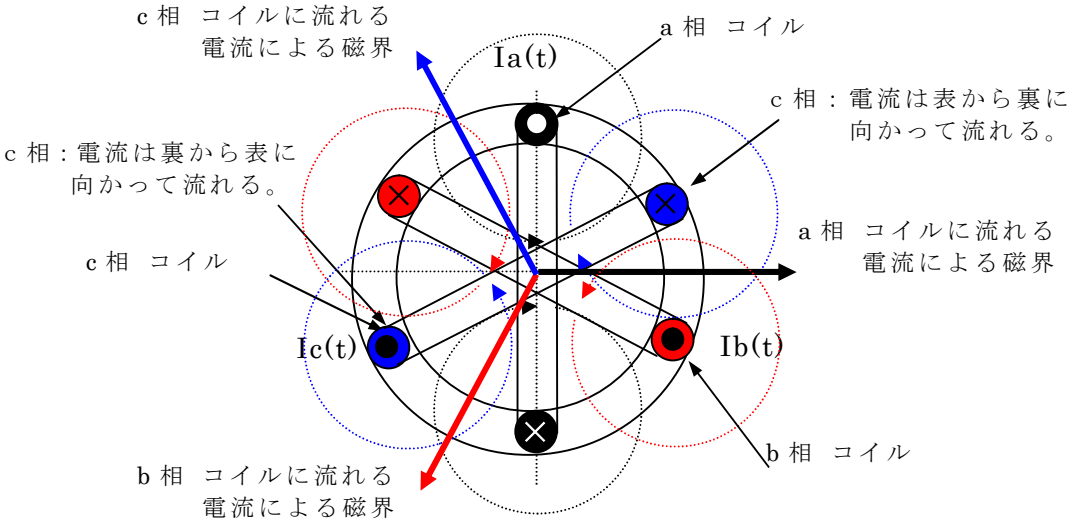


図 2.18

② 同相電流による回転磁界

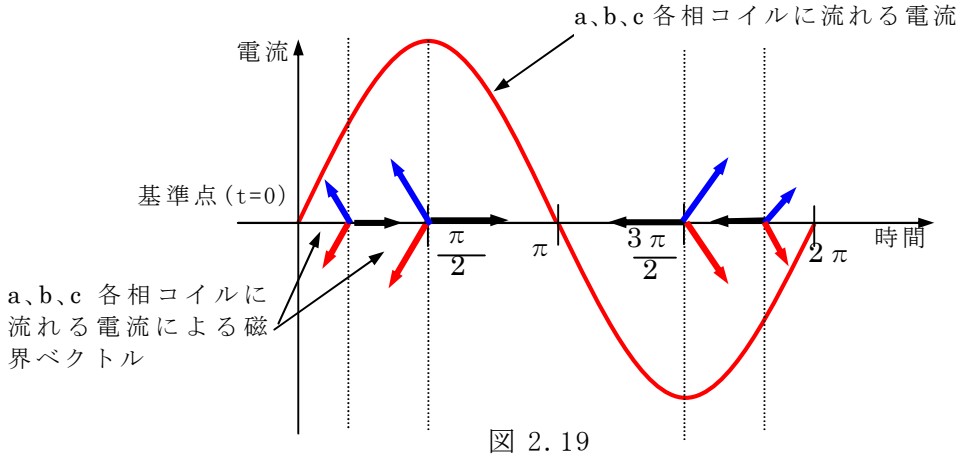


図 2.19

③ 対称三相交流電源

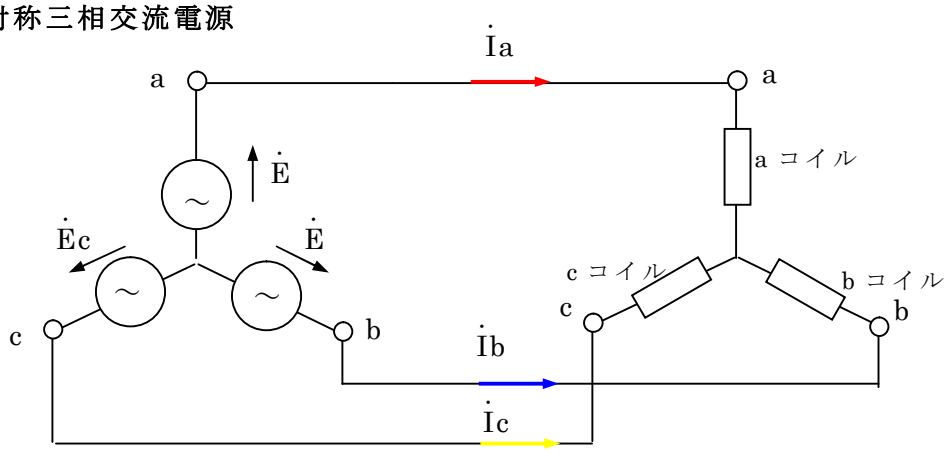


図 2.20

④ 三相交流電源による回転磁界の発生

図 2.21 の位相が 120 度異なる三相電源によって作られる磁界は、2 極の場合、図 2.22 のように電源周波数と同じ回転数で回転します。

この回転磁界の中に回転可能な導体を置くと、導体に電流が流れ、その電流による磁界と回転磁界が相互作用して回転力を生じ、三相誘導電動機となります。

・対称三相交流

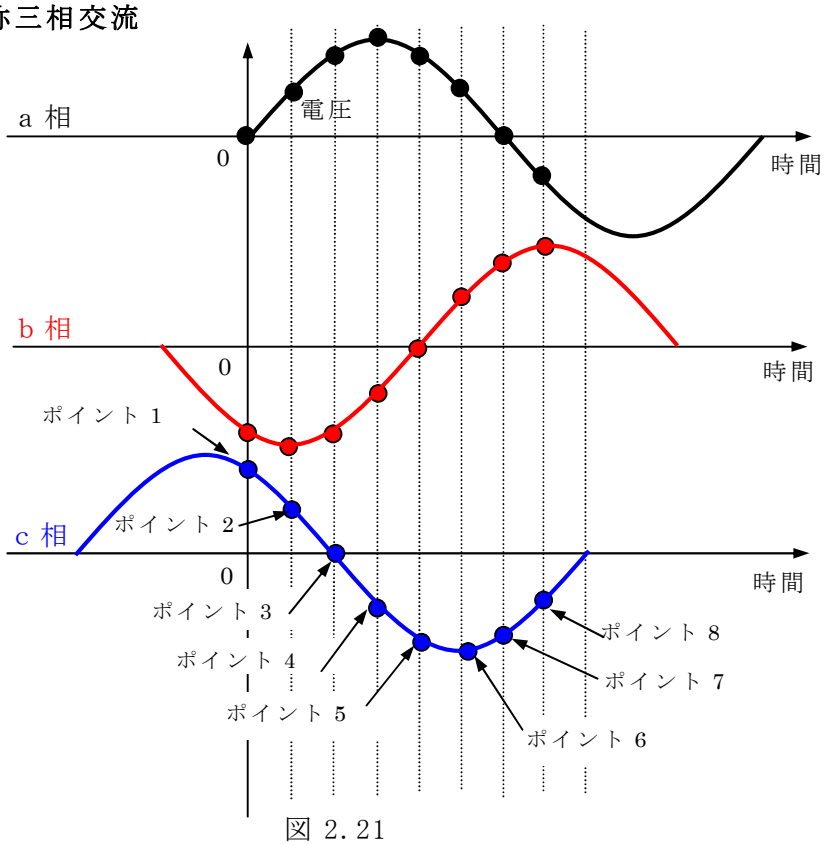
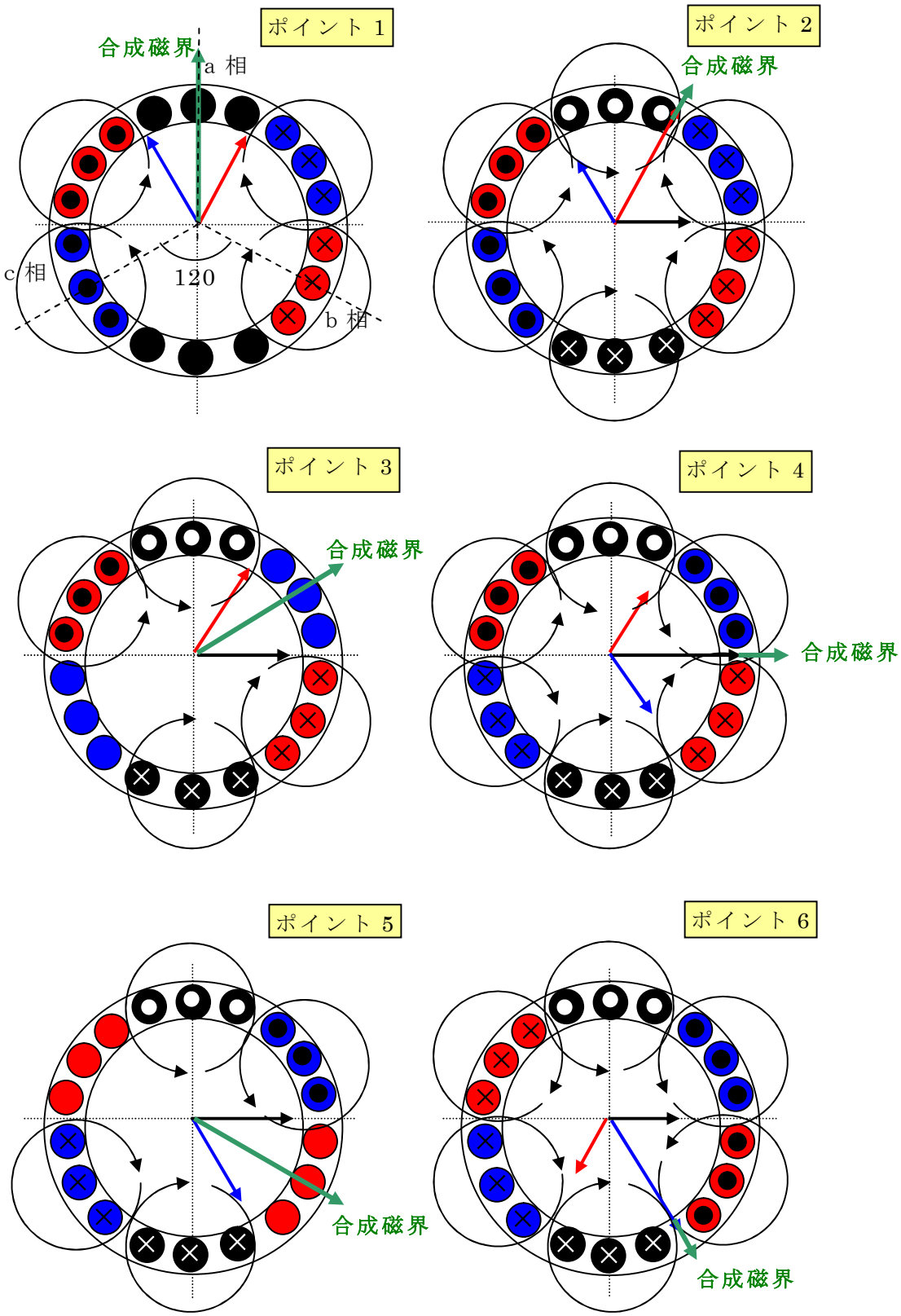


図 2.21

・三相回転磁界の発生過程（例　2 極の回転磁界）



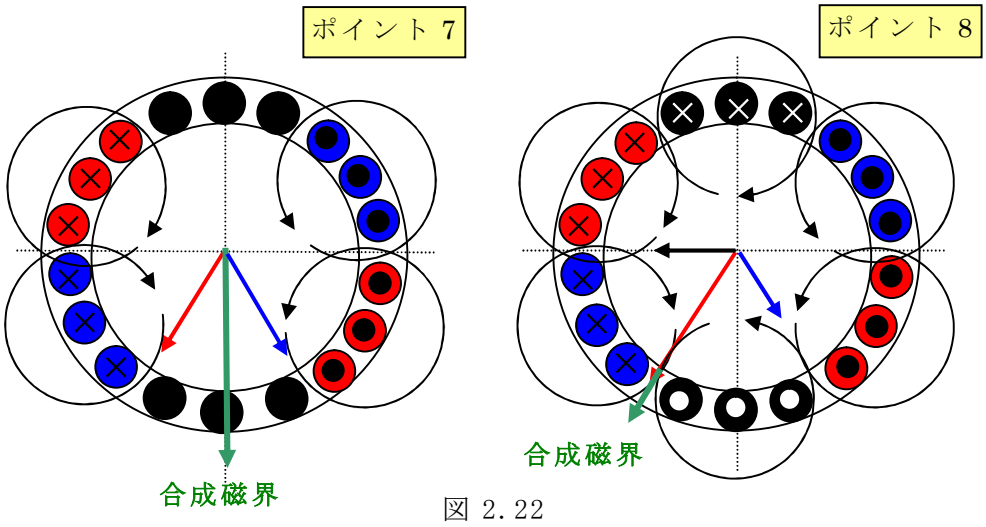


図 2.22

⑤ 三相誘導電動機の原理（例　2 極の三相誘導電動機）

・一般

三相誘導電動機は、図 2.23.1 のように固定子巻線に三相交流電圧を印加すると、回転磁界が発生し、回転子がこの磁束を切る（三相交流電圧を印加し、回転磁界が発生した時点では回転子は停止しているので、相対的な関係で回転子が磁束を切ることになります。）ことにより回転子に渦電流が流れ、「フレミングの左手」の法則によりトルクが発生するものです。

なお、回転子が回転磁界と同じ速さで回転している時は、回転子が回転磁界を切らないため、渦電流が流れずトルクは発生しません。（回転子と回転磁界の間には速度差が必要で、これを「すべり」と言います。

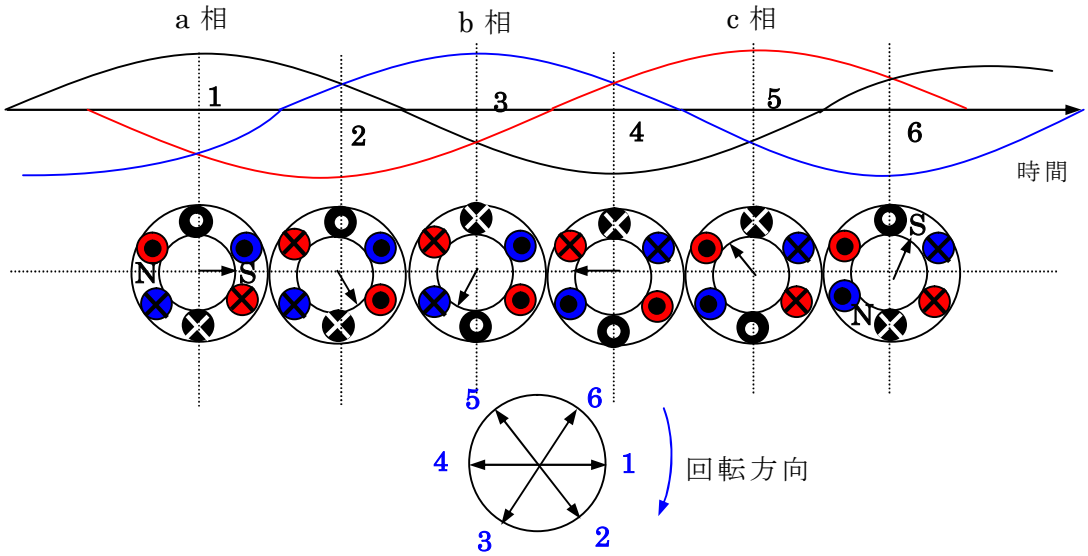


図 2.23.1

・トルクの発生

2 極の三相誘導電動機の回転原理は、図 2.23.2 のようになります。

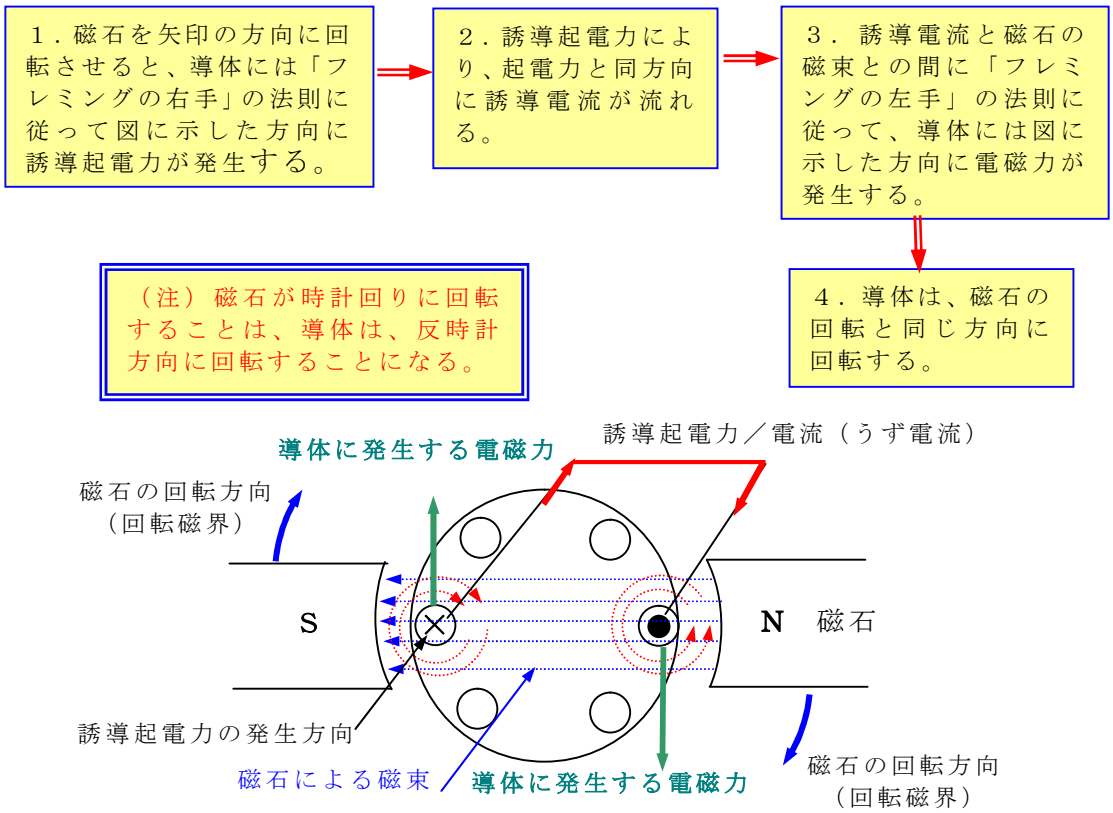


図 2.23.2

・回転磁界の発生（例　2 極の三相回転磁界）

例えば、図 2.23.3 の「ポイント 4」から判るように、2 極の三相回転磁界では、2 極の磁石と同じ磁界が発生します。

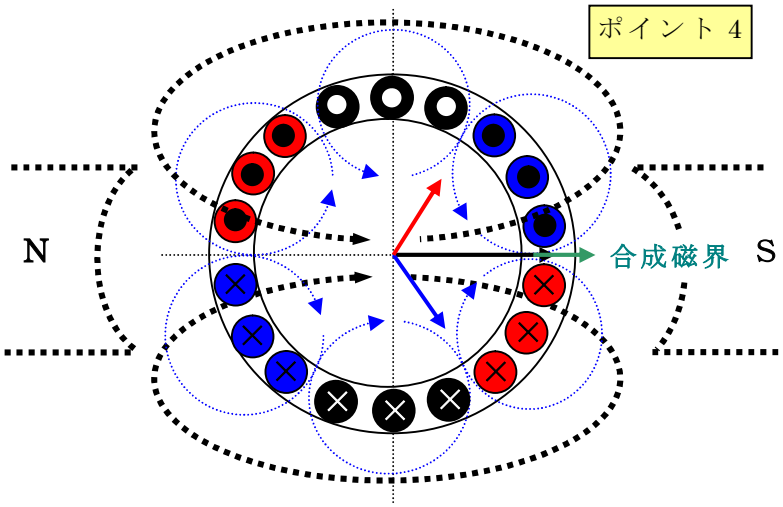


図 2.23.3

④、⑤から、次のことが判ります。

- 三相交流が１サイクルすると、三相合成磁界も１回転します。
- 電源の周波数が 60〔Hz〕であれば、三相回転磁界の回転速度は 60〔rps＝回転／秒〕になります。
- 合成磁界の回転方向は、a→b→c で三相交流の位相の順序に一致しています。

以上は、２極の三相誘導電動機の例ですが、４極、６極の三相誘導電動機の場合、その回転速度は４極機では２極機の 1/2, ６極機では 1/3 となります。

一般に、回転磁界の速度 N_S〔m^{-1}〕は、同期機と同じように電源の周波数 f〔Hz〕と磁極数 P で決まり、次式で表されます。（N_Sは**同期速度**とよばれています。）

$$Ns = \frac{f}{\frac{P}{2}} \times 60 = \frac{120\,f}{P} \quad 〔m^{-1}〕$$

例えば、４極機で電源の周波数が 60〔Hz〕であれば、三相回転磁界の速度すなわち同期速度は N_S=120×60/4=1800〔m^{-1}〕となります。

⑥　直流発電機の原理（参考）

直流発電機の構造は、基本的には図 2.23.3 のように回転電機子型交流発電機と同じですが、常に一定方向の電圧を発生させるため（回転電機子型交流発電機では、発生する起電力の方向が導体の位置が左側と右側は逆になることを利用して交流起電力を引出しています。）、スリップリングの代わりに導体の引出し口に整流子を置いて、ブラシを通して右側がプラス、左側がマイナス一定になるようにして直流起電力を引出しています。

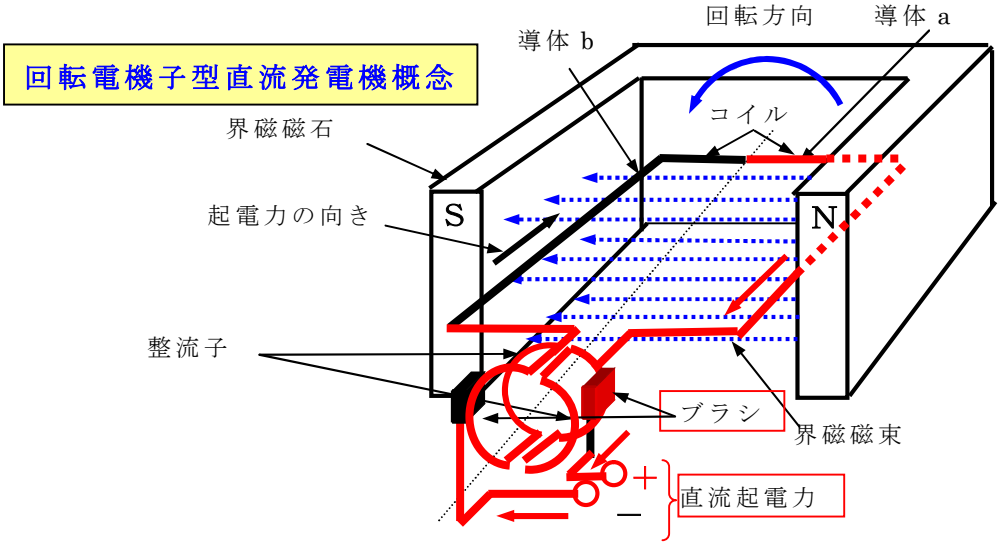


図 2.23.4

【整流子】

図 2.23.4 のように、界磁磁束の中を a, b の 2 本の導体が一つの巻線として回転すると起電力が各導体に発生する。直流機の場合、磁束密度はブラシの前後での反転を除き N、S 極はほぼ一定に作られているので、回転子導体に発生する起電力は磁束密度に比例して図 2.23.5 のように上向きと下向きの交流が発生する。直流起電力を得るために、起電力を引き出す装置として導体を右側、左側で分離した整流子を設け、常に一定方向の起電力を取出している。

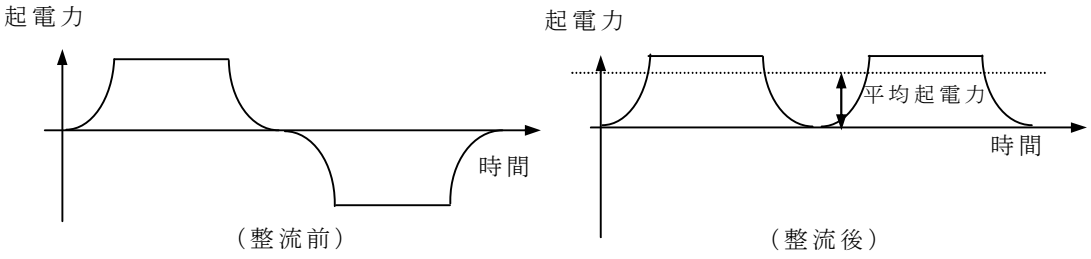


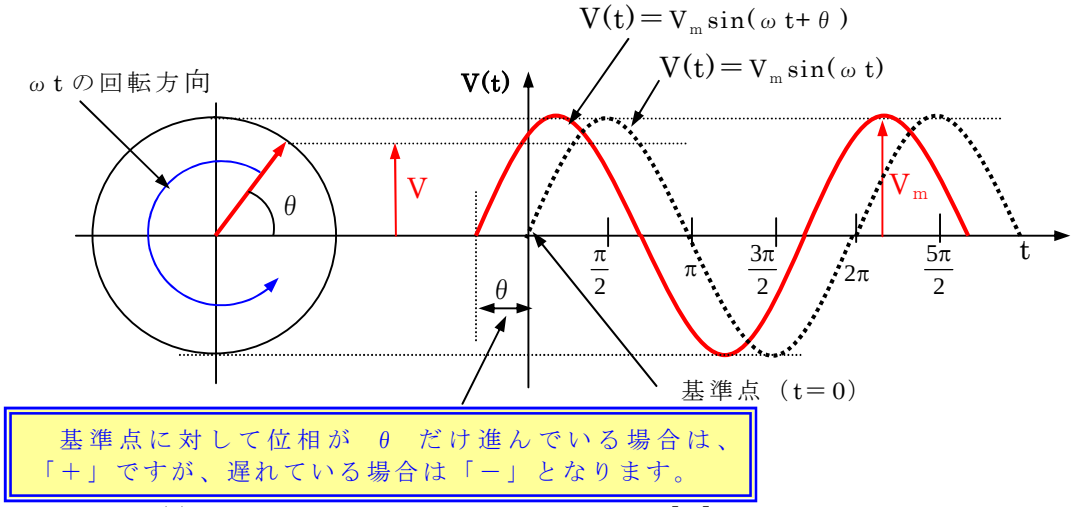
図 2.23.5

第３章　交流の数式化

１．交流を数式で表す方法（単相交流で説明）

交流は、平行磁界中に同一巻き数のコイル１組をお互いに等間隔で配置して回転させると各コイルに大きさが等しい正弦波の起電力が発生し、図3.1のようになります。

波形は、sin 波形なので、一般式として次のように記述します。



基準点に対して位相が　θ　だけ進んでいる場合は、「＋」ですが、遅れている場合は「－」となります。

（注）V(t)：時刻 t における起電力の瞬時値[V]

V_m　：起電力の最大値もしくは振幅[V]

ω　：角周波数もしくは角速度[rad／秒]（＝２πf）

θ　：初期位相[rad]　、　ω t+ θ　：位相[rad]

t　：　時間[秒]　、　　f：周波数[Hz]

図 3.1

なおωt について

ωt は、t 秒間の回転角度[rad]を表しており、周波数との関係は、次のようになります。

①[rad]は弧度法表記の単位で、図 3.2 のような扇型 OAB を考えると、中心角は円弧の長さに比例し､円弧の長さと扇型の半径の比をとると、同じ角度に対して扇型の大きさにかかわらずこの比は一定になります。

この性質を利用して角度の大きさを定めたのが弧度法で、$\theta = \frac{1}{r}$ となります。（[rad]に対して[°　／度]を度数法といいます。）

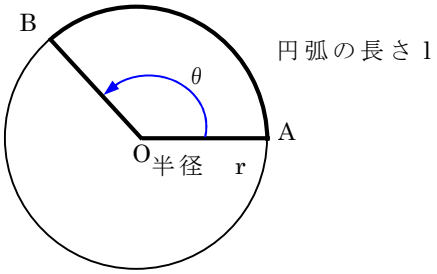


図 3.2

②円弧の 1 回転は、度数法では 360〔°〕、弧度法では 2π〔rad〕となります。

③V(t)が 1 回転（360°）すると、sin 波形は 1 サイクル（1 周期）進みます。従って、周波数は 1 秒間のサイクル数、すなわち、回転数なので、1 秒間に進む回転角度は、2πf となります。

すなわち、ωt＝2πft で、ω＝2πf となります。

2．交流の表記方法

交流の電圧と電流の関係の表記方法には、一般的に瞬時値、ベクトル及び複素数の表記の仕方があります。

これを図 3.3 の三相交流回路で説明します。

（注）一般的に電源電圧は「E」、負荷に印加される電圧は「V」、相順は「a」、「b」、「c」で表記されます。

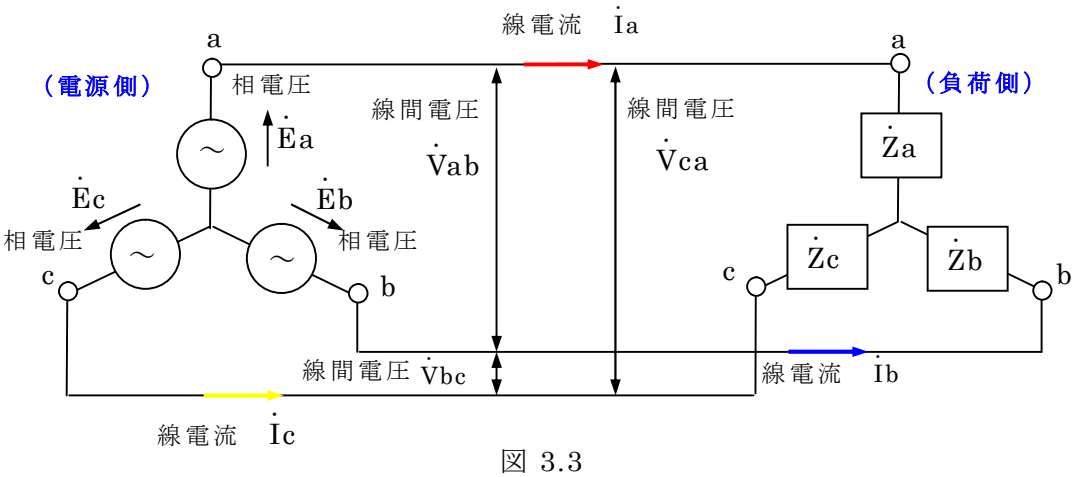


図 3.3

(1) 瞬時値表示（波形表示）

波形表示とも言い、図 3.4 のように sin の数式を用いて表記します。

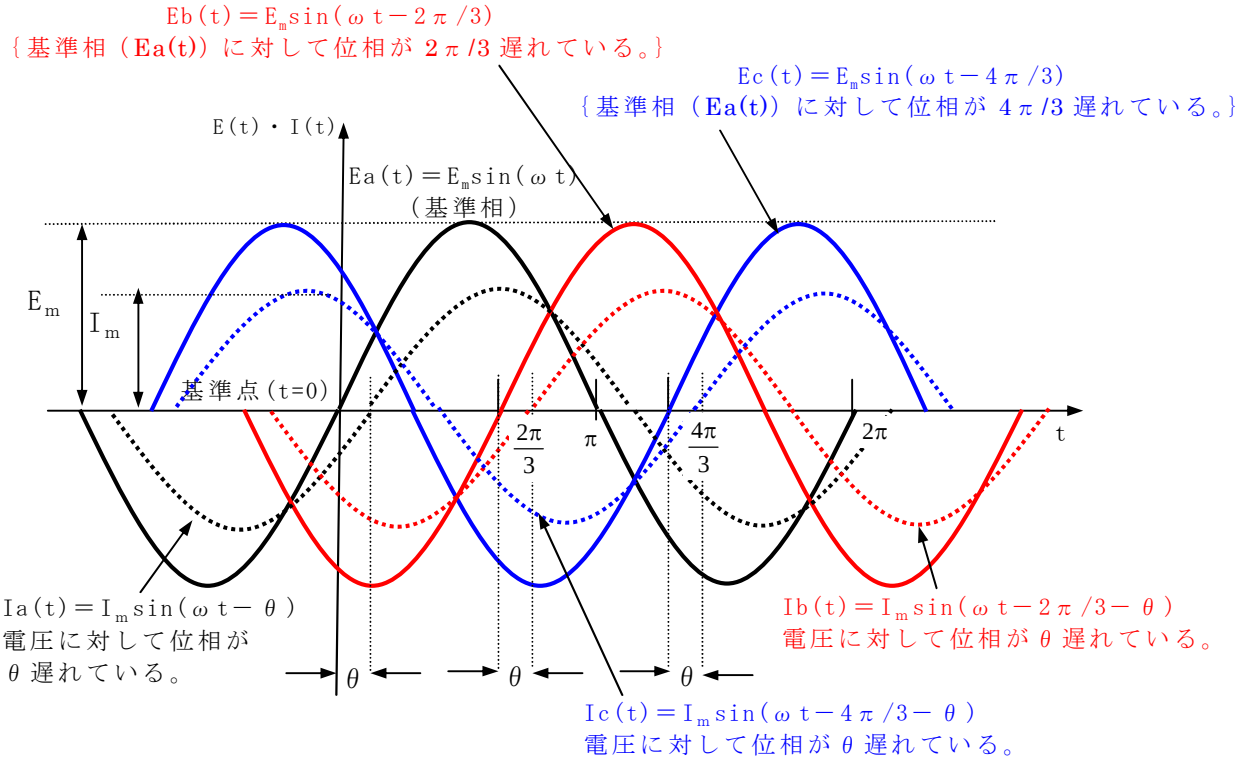


図 3.4

(2) ベクトル表示

図 3.5 のように、三相交流の大きさを線分の長さで示し、向きを矢印のついた線分(有向線分)で表します。

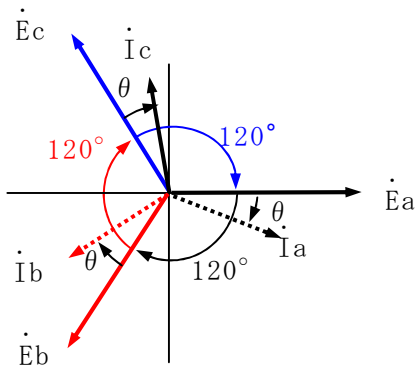
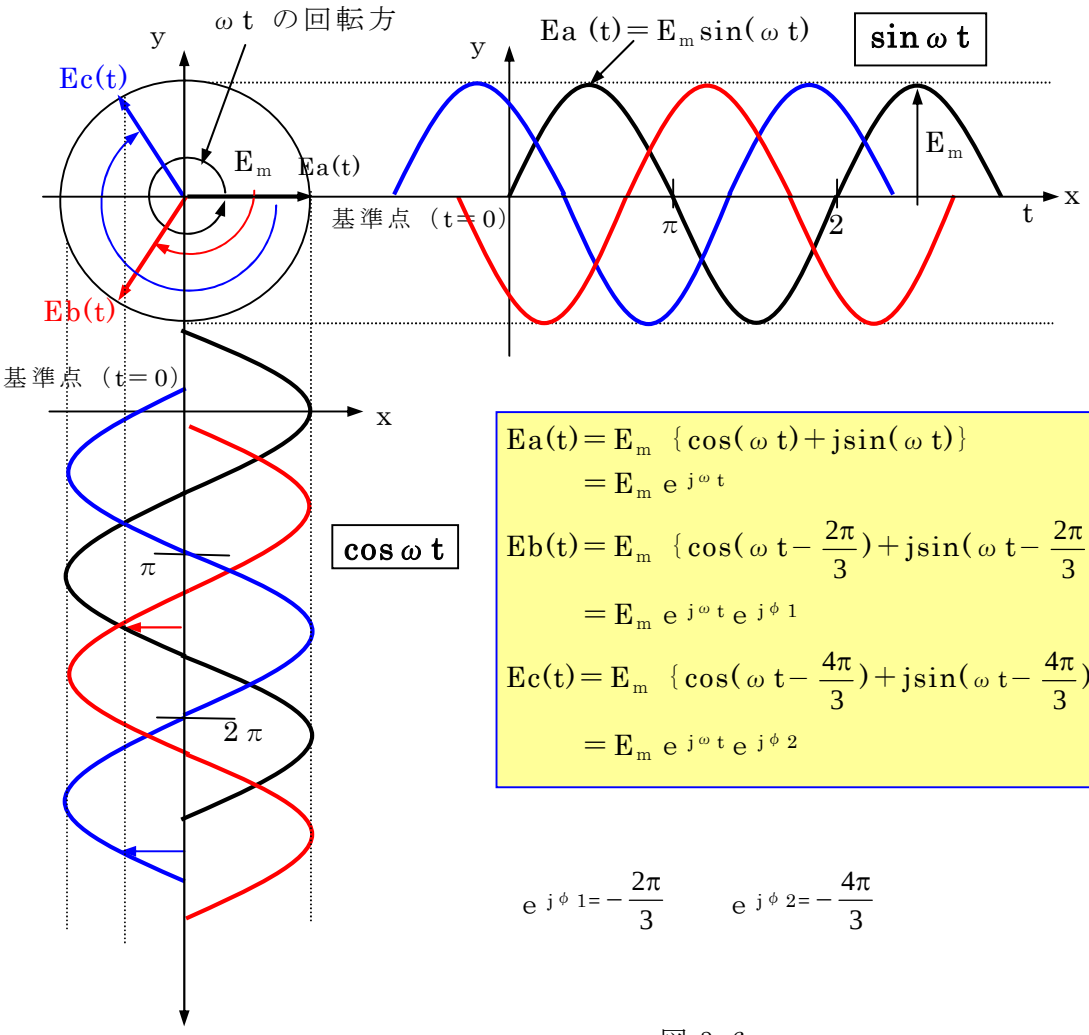


図 3.5

(3) 複素数表示

図 3.6 のように、三相交流の大きさをと向きを実数 a、b と虚数単位 I を用いて a + bi の形で表します。



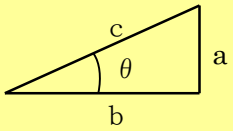
$$Ea(t) = E_m \{\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\}$$
$$= E_m e^{j\omega t}$$
$$Eb(t) = E_m \{\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) + j\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})\}$$
$$= E_m e^{j\omega t} e^{j\phi 1}$$
$$Ec(t) = E_m \{\cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) + j\sin(\omega t - \frac{4\pi}{3})\}$$
$$= E_m e^{j\omega t} e^{j\phi 2}$$

$$e^{j\phi 1} = -\frac{2\pi}{3} \qquad e^{j\phi 2} = -\frac{4\pi}{3}$$

図 3.6

（補足）

・正弦
　a ＝ c sin θ
・余弦
　b ＝ c cos θ
・正接
　a ＝ b tan θ



第４章　交流の電気の種類

１．単相交流

単相交流は、図 4.1 のように電圧の方向と大きさが時間とともに変化し、電圧の変化が同じ周波数で１つの変化しかしない場合をいい、平行磁界中にコイルを１組配置して回転させるとコイルに図 4.1 のような正弦波の起電力が発生します。

(1) 単相交流波形

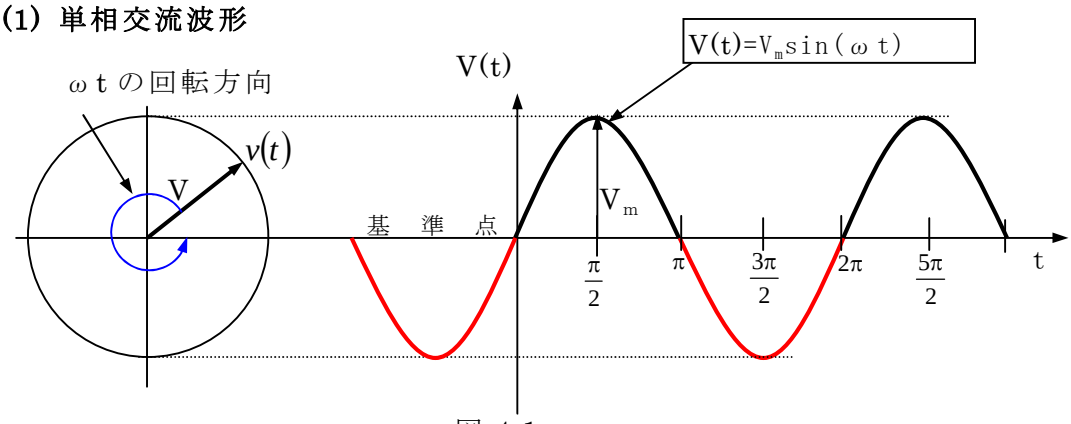


図 4.1

(2) 単相交流回路

図 4.2 のような回路に単相交流電圧を加えた場合、回路に流れる電流は次のようになります。

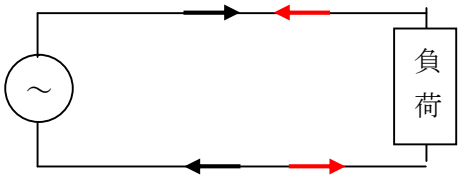


図 4.2

図 4.1 において、t=0 からπまでは「→／←」のように流れ、t=πから 2πまでは「←／→」のように電流は流れます。

(3) 単相交流の電圧と電流

単相交流電圧と電流の関係は、負荷の位相差により図 4.3 のようになります。

図 4.3 は、電圧と電流の位相差が $\pm\frac{\pi}{2}$ の例を示しています。

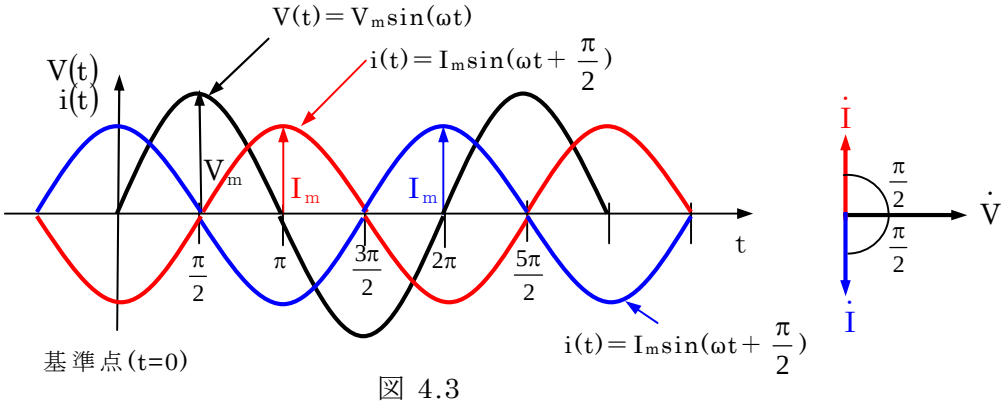


図 4.3

２．三相交流

三相交流は、平行磁界中に同一巻き数のコイル３組をお互いに等間隔（120°）で配置して回転させると、各コイルに図 4.4 のような大きさが等しく 120° の位相差がある正弦波の起電力が発生します。見方を変えますと、位相差が 120° の３組の単相交流が組み合わされてできています。

(1) 三相交流波形

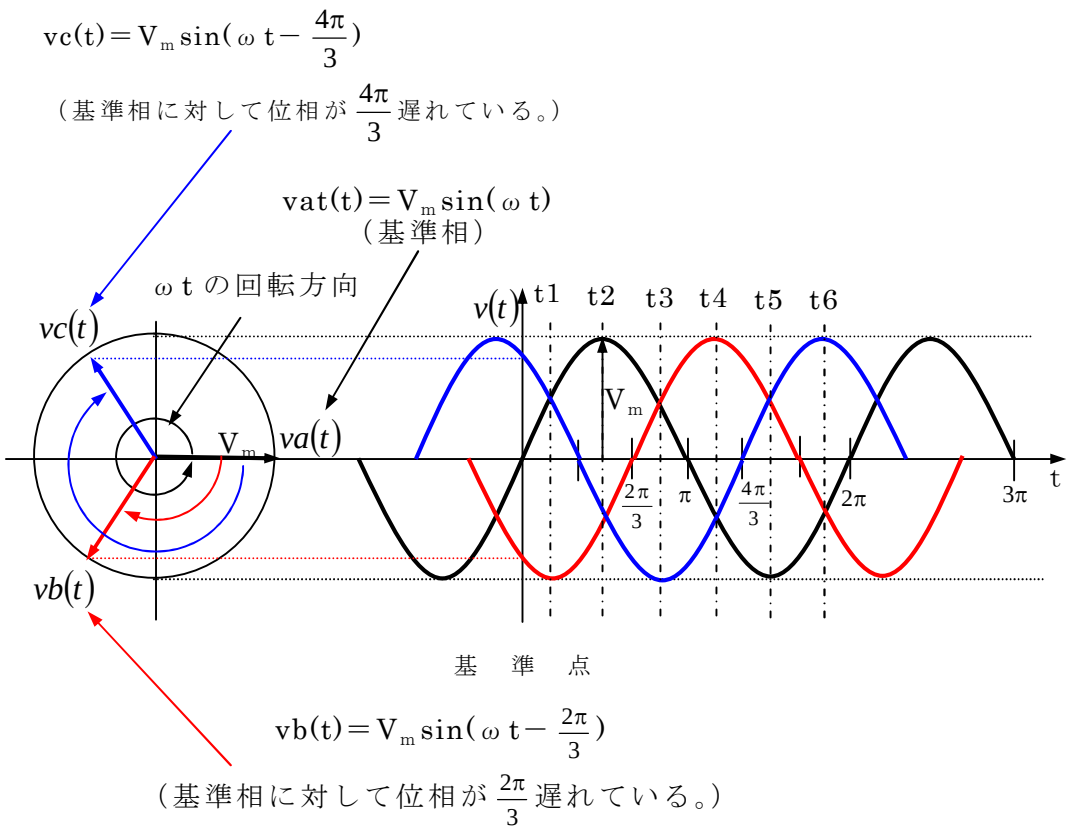


図 4.4

尚、三相交流の位相角と電圧の大きさの関係を表した詳細波形は、図 4.5 のようになります。

三相交流は、同じ電圧・周波数の３つの単相交流が組み合わされてできていますが、その組み合わせ方法は、３つの単相交流をａ、ｂ、ｃとすると、まず「ａ」が発電されて 1/3Hz 時間が経ったときに「ｂ」の電気が発電され、さらに 1/3Hz 時間が経ったとき（最初から 2/3Hz 経ったとき）に「ｃ」の電気が発電されるように、1/3Hz ずつ時間をずらして発電していく３つの単相交流電気を組み合わせています。

（三相交流の詳細波形）

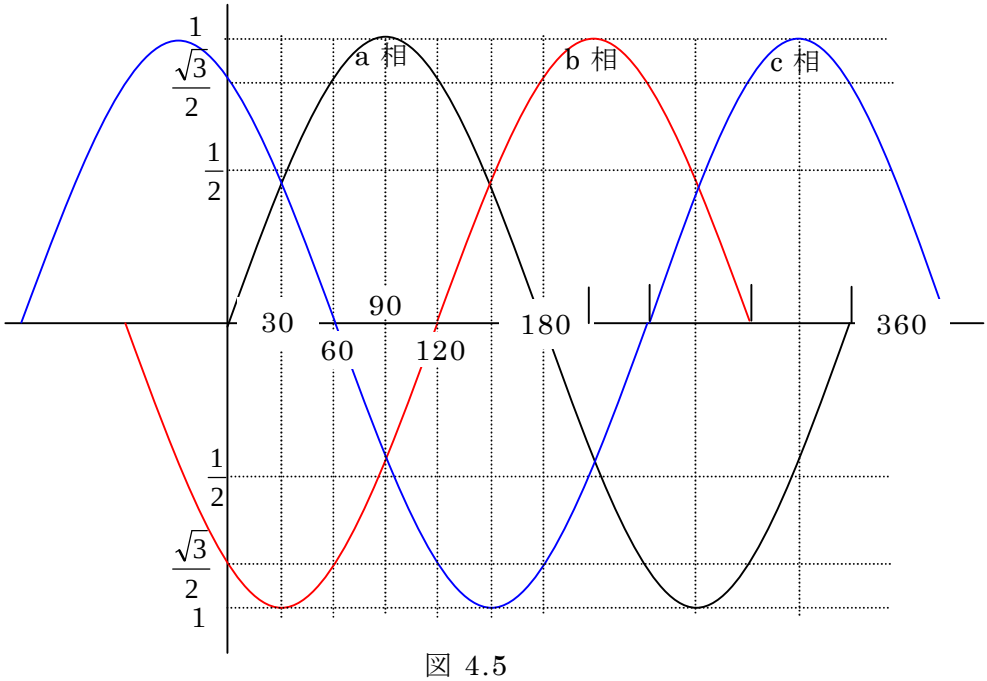


図 4.5

(2) 三相交流回路

図 4.6 のような回路に、図 4.5 の三相交流電圧を加えた場合、回路に流れる電流は次のようになります。

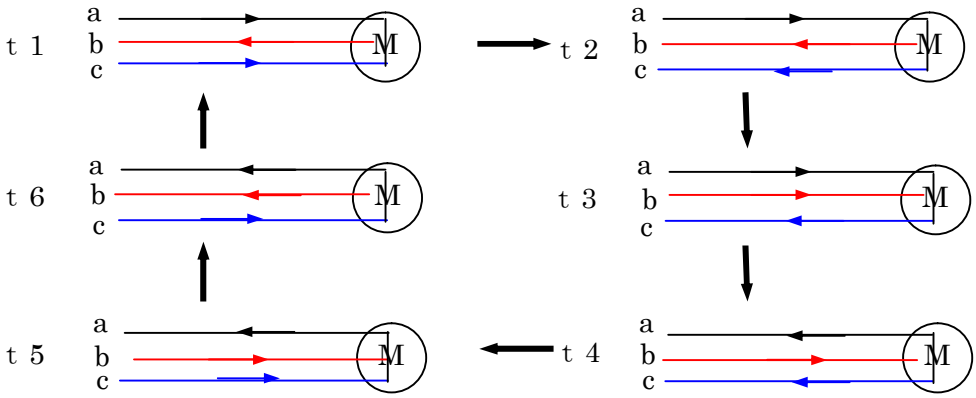


図 4.6

注、交流の「＋」と「－」表示について

交流の向きを表す方法として「＋」と「－」を使用されることがありますが、「＋」と「－」は数式の演算記号であり、状態を表す場合、誤解を招く可能性があるため、図 4.7 のように表すものとします。

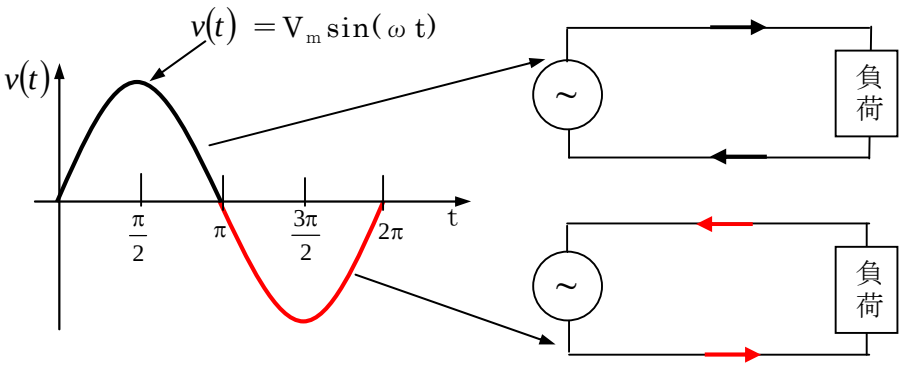


図 4.7

(3) 三相交流の定義

①三相交流は、一般的に、次の条件を満たした対称三相交流として扱います。

- 三相の起電力が等しい。
- 三相の周波数が等しい
- 位相差が三相全てで(2／3)π の関係にある。
- 結果、三相の起電力（瞬時値）のベクトル和が常に「0」になる。

②三相交流回路の負荷において、各相の負荷が等しい場合、平衡負荷と言います。

③電源が対称三相交流で、負荷が平衡負荷の回路を平衡三相回路と呼び、特に規定の無い三相交流回路は、平衡三相回路として扱います。

電源側：対称三相交流 ＋ 負荷側：平衡負荷 ＝ 平衡三相回路

(4) なぜ三相なのか

一般家庭では単相交流が使用されますが、発変電・送配電の分野では三相交流が採用されている理由は次によります。

① 電力の脈動が少ない。

② 単相では、交番磁界となって回転磁界にはなりませんが、三相では、120°ずつ、ずらして配置したコイルを組み合わせて、回転磁界を作れます。（三相誘導電動機は、三相回転磁界により回転します。）

③ 三相では、平衡負荷であれば、どの時間断面をとってもａ、ｂ、ｃ各相の電気の総和は「0」になり帰路に電気が流れません。
（三相交流というのは、3 つの異なった単相交流電気をわずかな時間差をつけて発電すると、一般的には 1 つの交流電気を送るのに 2 本づつ計 6 本の電線を必要とし、帰路の電線を 1 本に束

ねても 4 本必要になりますが、帰路の電線には線電流が流れないため、帰路の電線は不用になり、3 本の電線でよいので効率的・経済的といえます。)

④ 三相三線で電力を送ると、電線あたりの送電容量が大きくなります。

例えば、線間電圧 V、線電流 I とすると、単相だと、二本の線で VI の電力（線一本あたり VI/2=0.5VI)、三相三線だと 3 本の線で $\sqrt{3}$VI（一本あたり VI/$\sqrt{3}$=0.57VI となって、単相より 15%ほど増えます。)となります。

（同じ送電電力ならば、電線の質量を低減できます。)

⑤ 点滅器具のちらつきが少なくなります。

例えば、 蛍光灯や水銀灯などの放電管では、一周期に 2 度点滅しています。

単相だと、たとえば関東だと毎秒 100 回の点滅になります。(人によってはこれが気になることもあります。)

三相を使って 3 本の放電管をつけると、点滅のタイミングがずれて、毎秒 300 回になり、点滅が目立たなくなります。

第５章　交流の電気の表し方

１．交流の大きさの表し方

(1) 基本事項

（質問 1）

家庭のコンセントにきている電気の電圧は“交流 100V”といいますが、交流は、図 5.1 のように刻々と電圧の変わるものだと習っています。その刻々と変わる電圧のいつが 100V なのですか？

（回答 1）

イメージ的には、一番電圧が高くなったときが 100V のように思われますが、実は、図 5.1 のように一番電圧の高くなったときのおよそ 70.7%の値が 100V で、これを実効値といいます。（逆算すると、交流 100V の電圧の一番高くなった瞬間の値は、141.421…V で、これを最大値（波高値）といいます。）

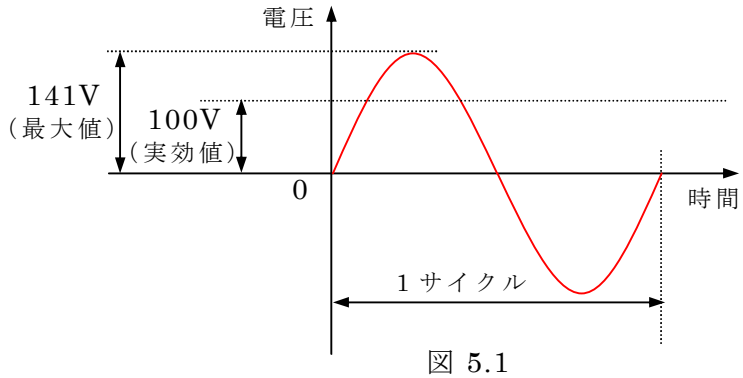


図 5.1

（質問 2）

なぜ、実効値を使用するのですか？

（回答 2）

交流の諸計算において、実効値を使用することによって、直流の計算で使用したオームの法則やジュールの法則が、そのまま交流でも成立するからです。

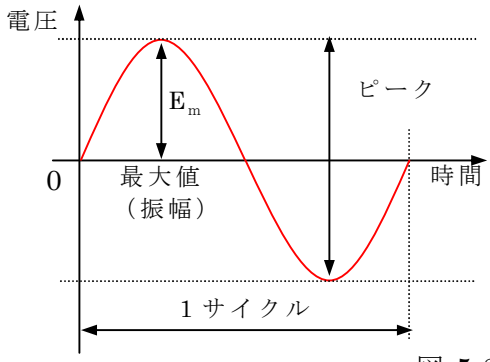
(2) 一般事項

交流の大きさの表し方には、瞬時値（最大値）だけではなく、波形の面積の平均から算出する平均値及び波形の二乗の面積から算出する実効値の３つの方法があり、交流電圧を例に説明します。

なお、便宜的に交流の上方向を「プラス」、下方向を「マイナス」と記述します。

①最大値

最大値は、図 5.2 の様に定義されます。



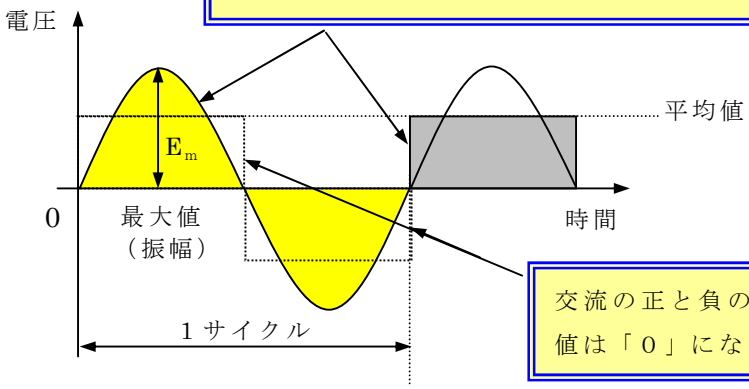
基準となる０［Ｖ］から一番大きい値を「最大値」と言い、一般的に E_m で表します。
正の最大値から負の最大値までの値を「ピーク値」といいます。

図 5.2

②平均値

平均値は、図 5.3 のように定義されます。

正・負何れかの半サイクルの面積（黄色部分）と、グレー部分の面積が等しくなる点が平均値になります。
尚、最大値を E_m とすると、平均値は $2E_m/\pi$ となります。



交流の正と負の平均値を取ると値は「０」になってしまいます。

図 5.3

③実効値

実効値は、図 5.4 のように実際に仕事をする交流の値で「直流電力と同じ交流電力を発生する交流電圧の値を実効値といいます。

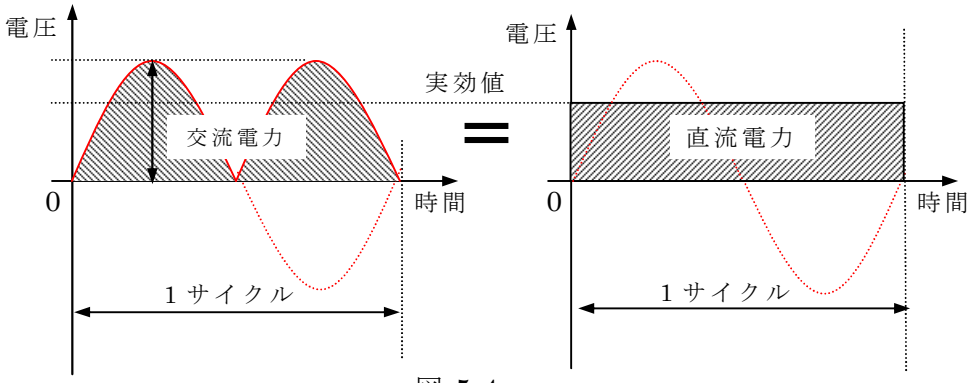


図 5.4

具体例として、図 5.5 のように負荷抵抗にある大きさの交流電圧を印加したとき 100［V］の直流電圧を印加したときに発生する電力（斜線に囲まれた部分）が同じとき、直流の電圧値 100［V］を交流の実効値といいます。

例えば、抵抗 R[Ω]に電流 I[A]が流れると消費電力は I^2R で、直流の場合は一定ですが、交流の場合は正弦波で変化するので I^2R の平均値を求めなければなりませんので、“抵抗負荷に直流電圧を加えたときと同じ電力を供給できる交流電圧の大きさ”を実効値と規定しています。

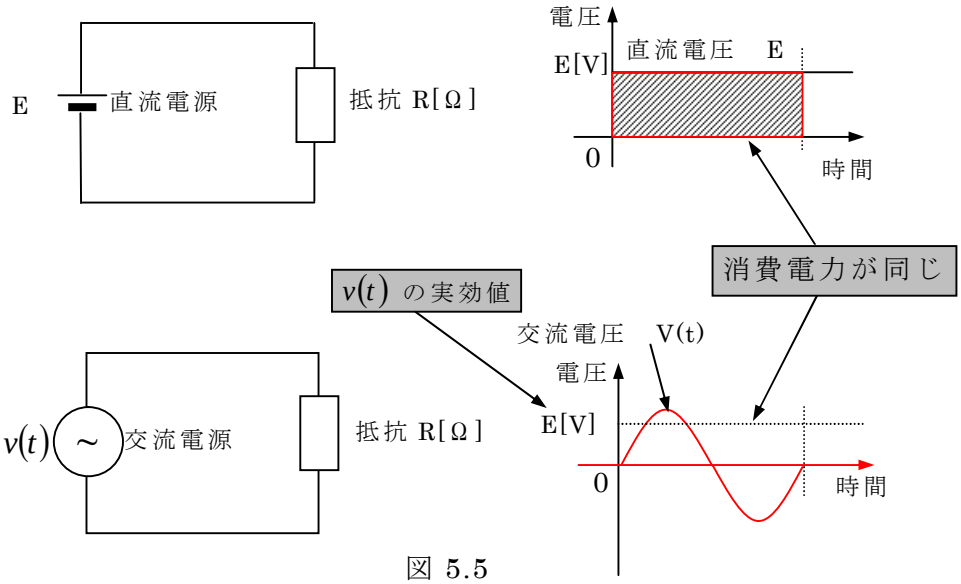


図 5.5

2．各種交流の大きさの表し方

(1) 基本事項

（質問 1）

プラスとマイナスに、交互に繰り返す波形の電気を交流といわれていますが、具体的な表し方を説明して下さい。

（回答 1）

時間の経過とともに電圧の大きさと向きが周期的に変化する（便宜的にプラスとマイナスを繰り返すといいます。）電気を交流といい、以下に示す条件もしくは特性値によって表すことができます。

①条件

・繰り返し波形であること。

・周期的に大きさと向きが変化し、平均値がゼロであること。

平均値がゼロで無い波形は、平均値がゼロである交流波形と直流の和で表すことができます。

②特性値

・周期：交流波形が 1 回繰り返す時間のことをいい、単位は[秒]で量記号は T で表わします。また、1 周期のことを「サイクル」といいます。

・周波数：1 秒間のサイクル数のことをいい、単位は[Hz]で量記号は f で表します。

また、周期との関係は f＝1/T となります。

③交流波形例

家庭で使用している電気の交流は、波形が正弦波で、図 5.6 のようになります。（電圧例で表示します。）

なお、参考に、直流の波形を図 5.7 に示します。

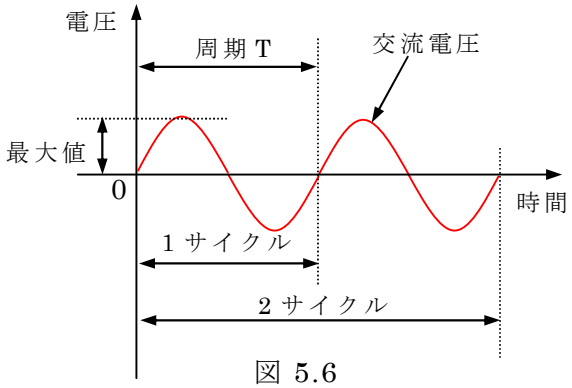


図 5.6

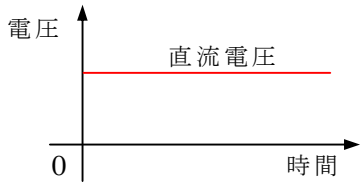


図 5.7

その他の代表的な交流波形を図 5.8 に示します。

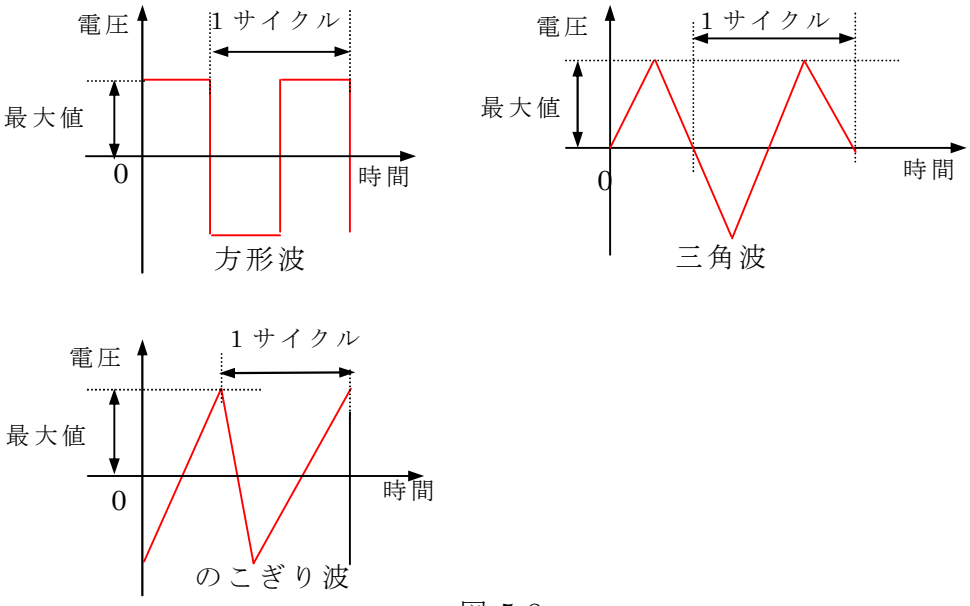


図 5.8

３．位相とは何か

交流回路で複数の交流信号が存在するとき、その相互関係、すなわち、ある点を基準とした場合（基準点と言います。）、お互いの時間的な「ずれ」を考える必要があり、この「ずれ」を位相といいます。なお、

① 位相は、複数の交流波形の時間的な「ずれ」を表しているため、電圧間、電流間及び電圧と電流間で発生します。

② 位相には、基準波形（基準点）に対して、図 5.9（１）のような「進み」「遅れの」相対的な関係があります。

③ 一般的に位相の単位は[rad：ラジアン]で、量記号はθ（シータ）で表します。（単位としては、度数法[°／度]で表記する場合もあります。）

④ 位相の表記方法としては、図 5.9(1)のようになります。

（位相の「進み」「遅れ」－電圧例）

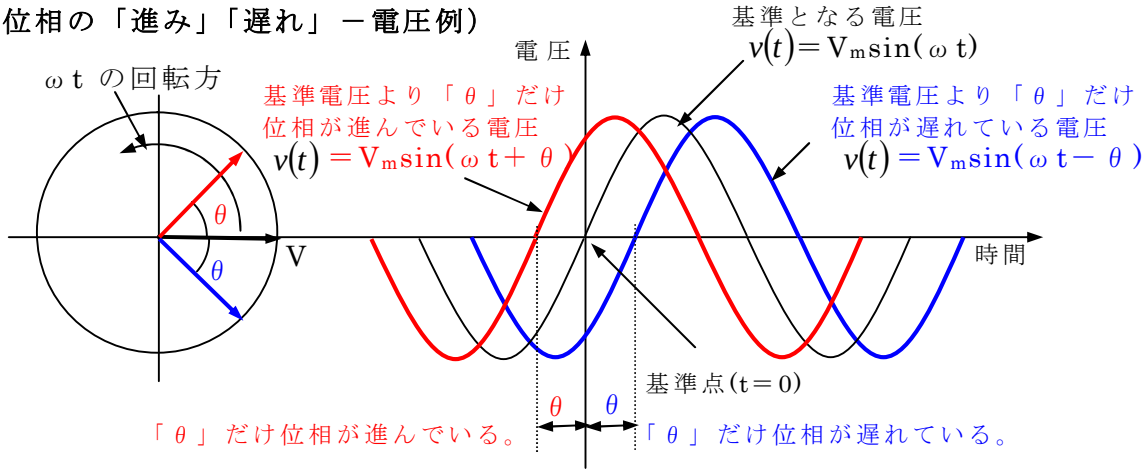


図 5.9(1)

（位相の表記方法－電圧例）

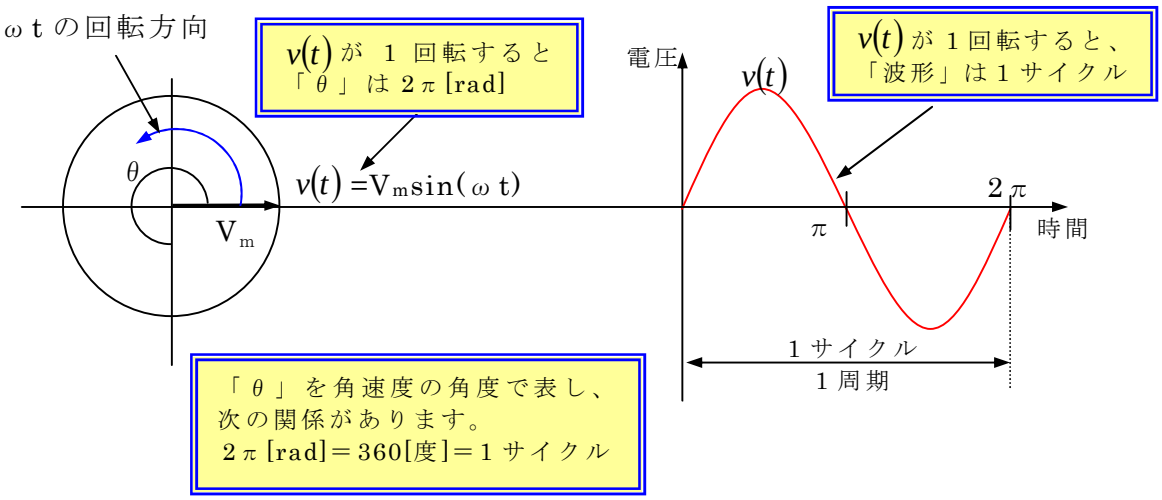
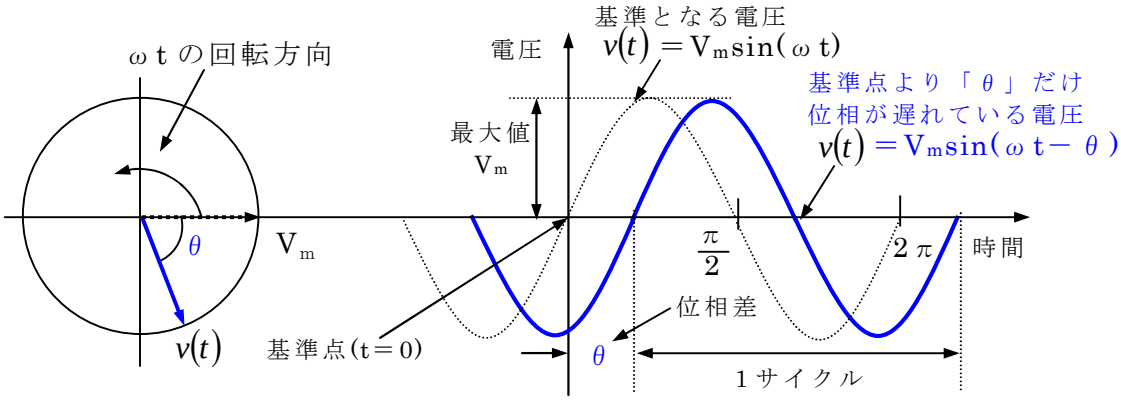


図 5.9(2)

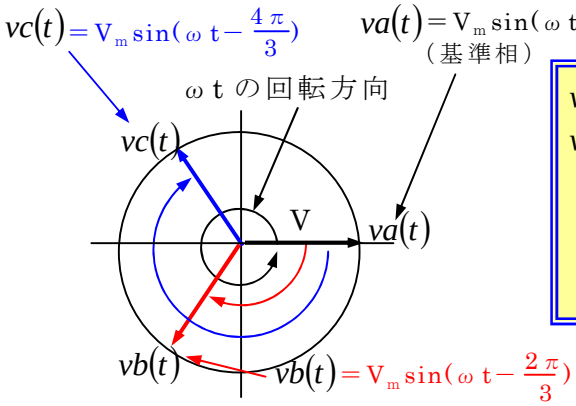
(a) 単相電圧波形が、基準点より「θ」だけが遅れている場合の位相は、図 5.10 のようになります。



Vmsin(ωｔ－θ)の(ωｔ－θ)を「位相」と言います。V(t)は基準となる電圧より時間的に遅れており、お互いの位相の差はθで、これを「位相差」といいます。

図 5.10

(b) 三相電圧波形の「進み／遅れ」の場合の相対位相は、図 5.11(1)のようになります。



vb(t)はva(t)より 2π/3 だけ「位相」が遅れ、vc(t)はva(t)より 4π/3 だけ「位相」が遅れているといいます。
尚、vb(t)はvc(t)より 2π/3 だけ「位相」が進んでいる、といいます。

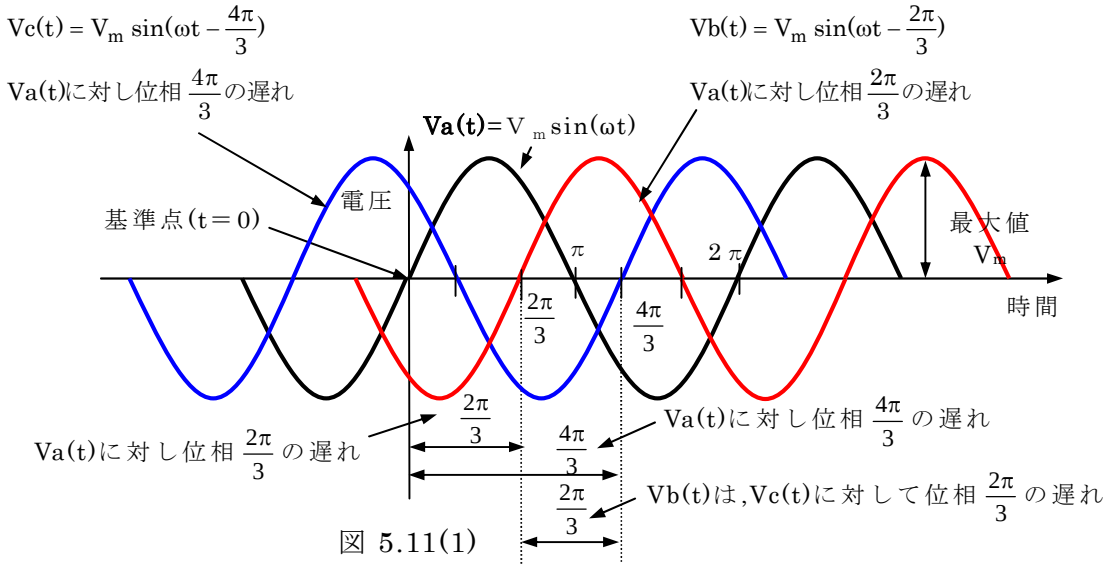


図 5.11(1)

(c) 単相交流において、電流が電圧よりも「θ」だけが遅れている場合の位相は、図 5.11(2)のようになります。

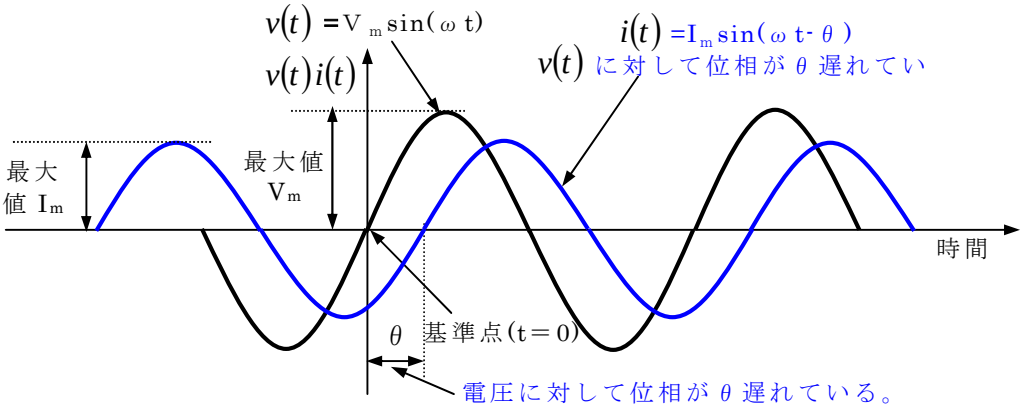


図 5.11(2)

(d) 単相交流において、電流が電圧よりも「θ」だけが進んでいる場合の位相は、図 5.12 のようになります。

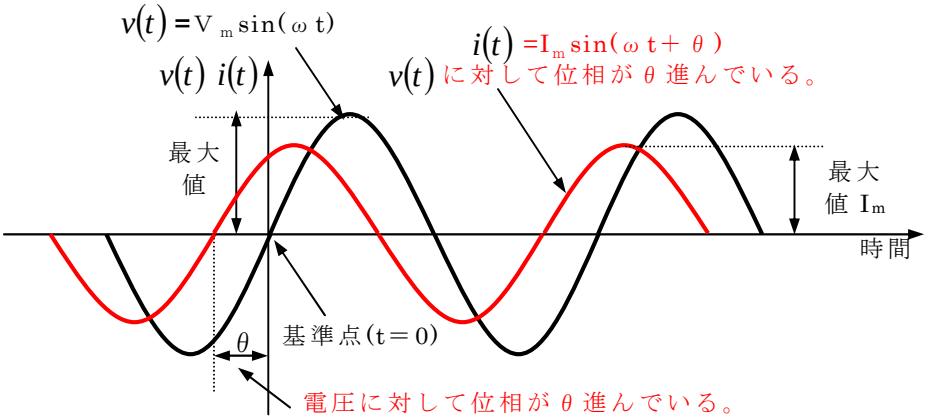


図 5.12

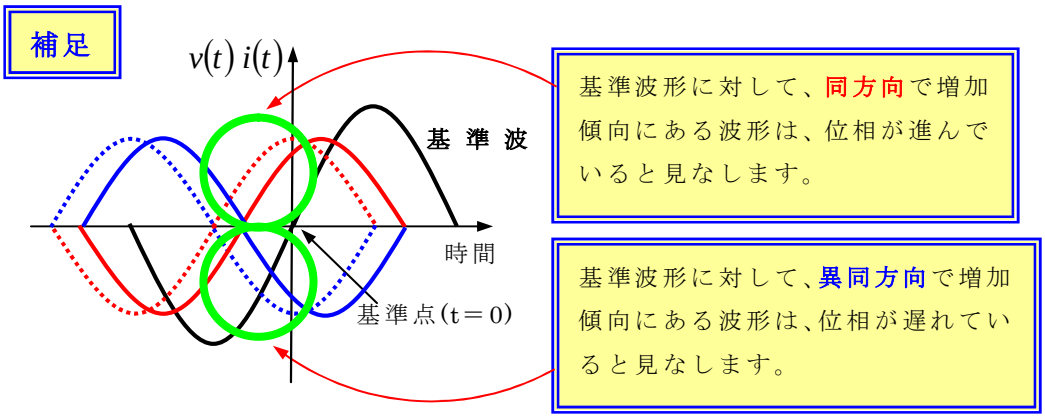


図 5.13

4．三相交流の相順と位相

三相交流は、図 5.14 のように起電力の発生する順に a 相、b 相、c 相のように表し、その位相差は基準相に対して 2／3π（120°）、4／3π（240°）となります。

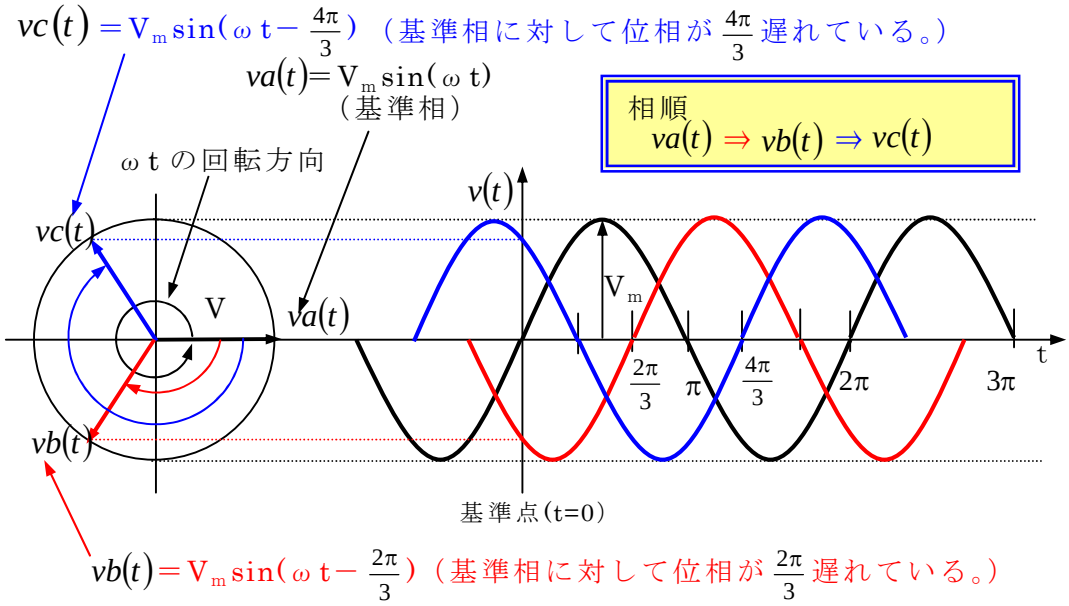


図 5.14

5．三相のつなぎ方

三つのコイル A、B、C で発生された三つの交流起電力を送電するために、次の二つの方法があります。

(1) Y 結線の考え方

図 5.15 のように三つの交流起電力を結線する方式を Y 結線といい、一般的に負荷によって図 5.16 のように三相三線式及び三相四線式の配電方式があります。

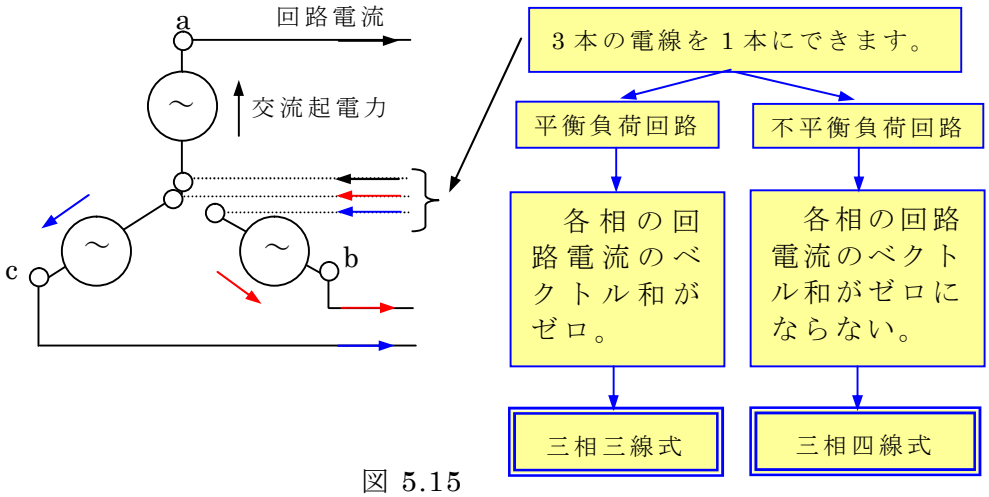


図 5.15

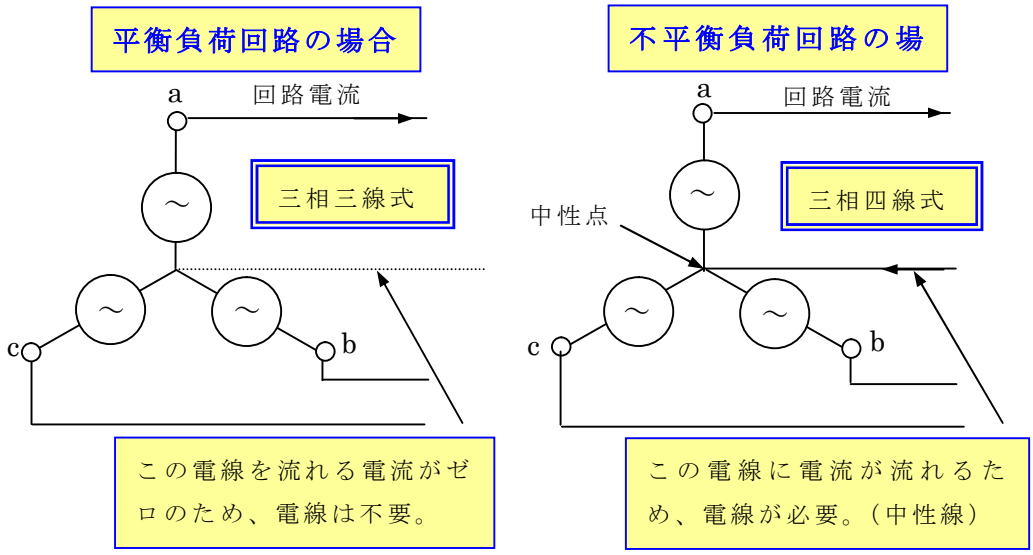


図 5.16

(2) Δ結線の考え方

図 5.17 のように三つの交流起電力を結線する方式をΔ結線といいます。

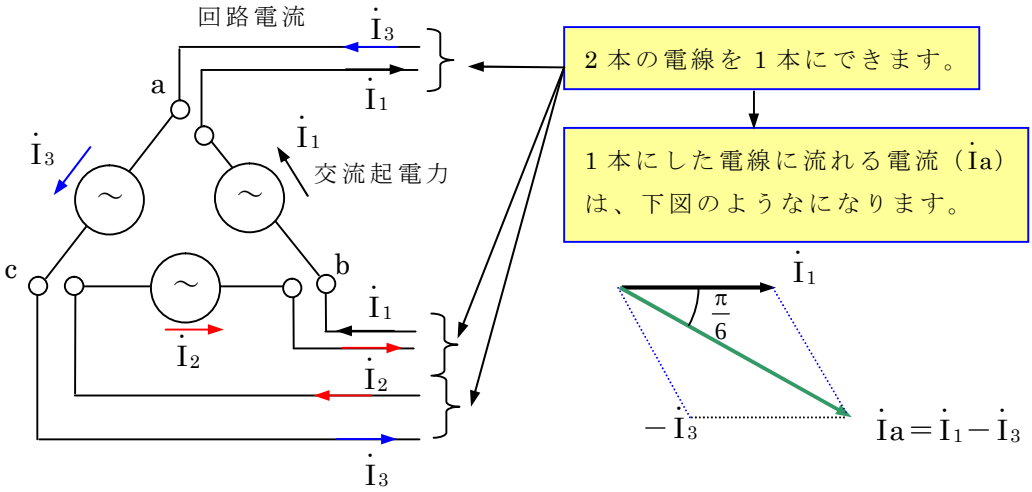


図 5.17

(3) 実際の結線

三相のつなぎ方には、電源、変圧器及び負荷の各々に対して、Y 結線、Δ結線あり、変圧器については、V 結線という故障対策の結線方式もあります。

①電源の結線方式

電源として、図 5.18 のような結線方式が一般的に採用されます。

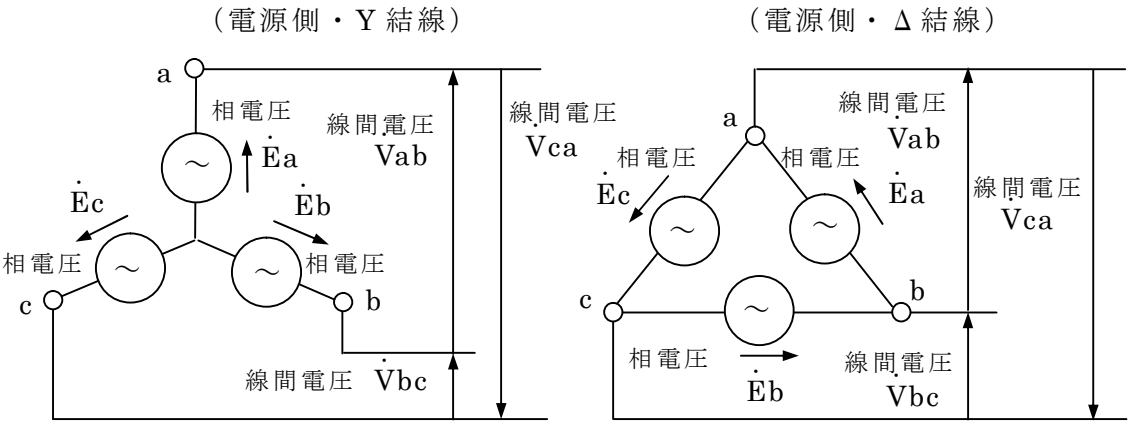


図 5.18

②負荷の結線方式

負荷として、図 5.19 のような結線方式が一般的に採用されます。

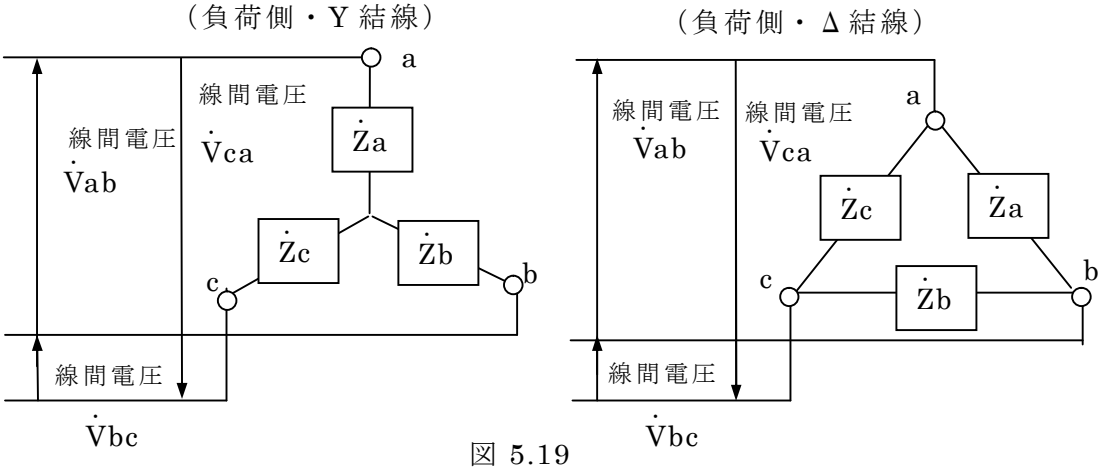


図 5.19

6．三相接続における電圧と電流の現れ方の違い

(1) Ｙ－Ｙ結線

電源側、負荷側共Ｙ結線における電圧と電流の関係は、図 5.20、21 のようになります。

① 回路図

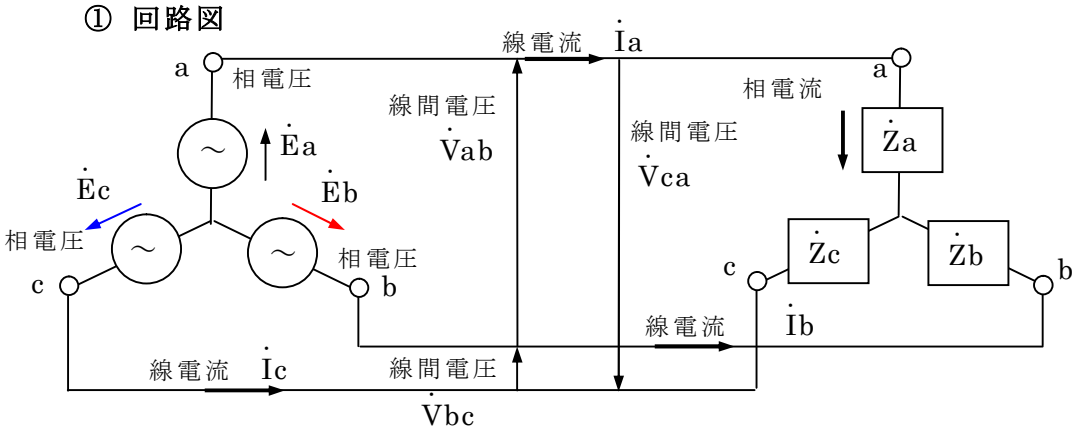


図 5.20

② 電圧ベクトル図

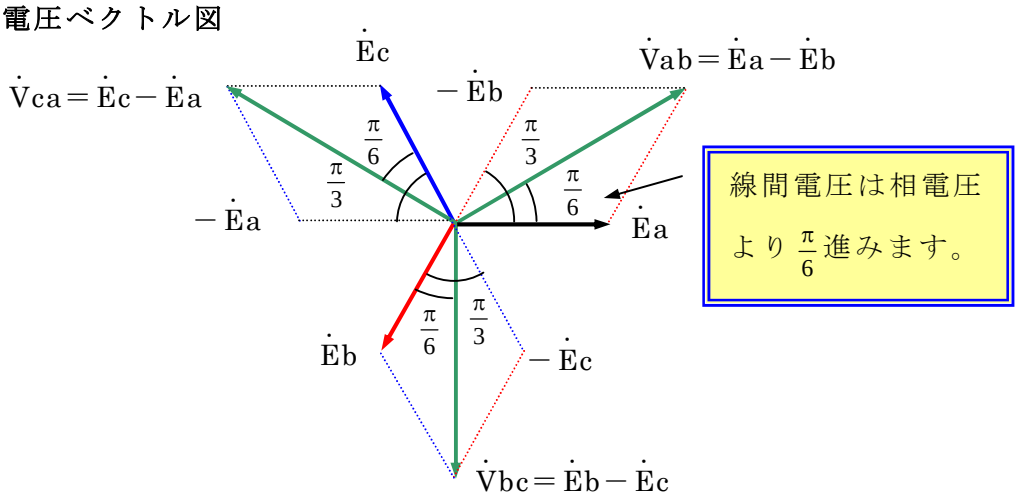


図 5.21

Ｙ－Ｙ結線では、線電流と相電流は同じですが、線間電圧は相電圧の $\sqrt{3}$ 倍となり、位相も $\frac{\pi}{6}$ 進みます。

線電流＝相電流
線間電圧＝$\sqrt{3}$×相電圧
線間電圧は相電圧に対して $\frac{\pi}{6}$ 位相が進む

(2) Ｙ－Ｙ結線における電圧と電流の考え方

図 5.22 のように、単相に分解して単相交流と同様に計算を行います。

平衡三相交流とすれば、各相の電圧、電流の位相差は同じなので、位相差を θ とすれば、相電圧と線電流の位相差は、次の様になります。

① 回路図

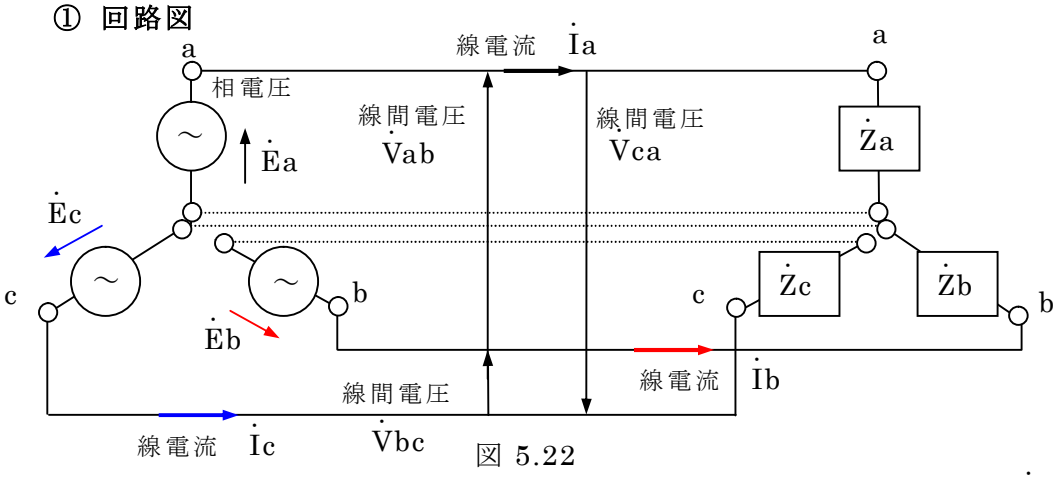
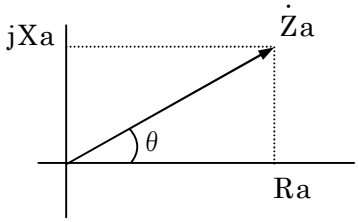


図 5.22

・線電流 $Ia = \dfrac{\text{相電圧 } Ea}{\text{インピーダンス}}$　（線電流＝相電流）

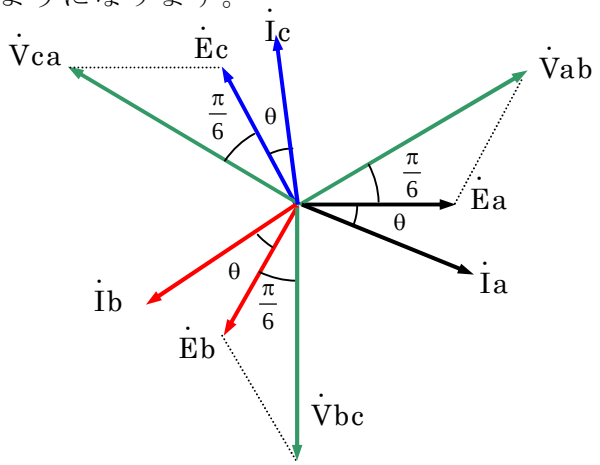


・ 相電圧と線電流の位相 $\theta = \tan^{-1}\dfrac{Xa}{Ra}$

（$\dot{Z}a = Ra + jXa$）

② ベクトル図

Ｙ－Ｙ結線における電圧と電流の位相差は、図 5.23 のベクトル図のようになります。



$Ia = \dfrac{Ea}{Za}$

$Ib = \dfrac{Eb}{Zb}$

$Ic = \dfrac{Ec}{Zc}$

図 5.23

Ｙ－Ｙ結線における相電圧と線間電圧の位相差は $\dfrac{\pi}{6}$（線間電圧が相電圧より進む。）、

線間電圧と線電流の位相差は $\dfrac{\pi}{6} + \theta$（線電流が線間電圧より遅れる。）となる。

(3) Δ－Δ結線

電源側、負荷側共Δ結線における電圧と電流の関係は、図 5.24、25のようになります。

① 回路図

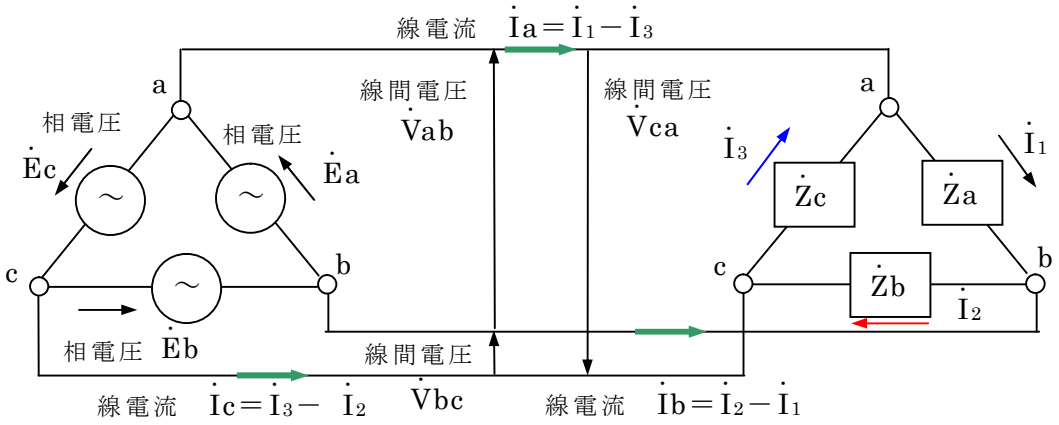


図 5.24

② ベクトル図

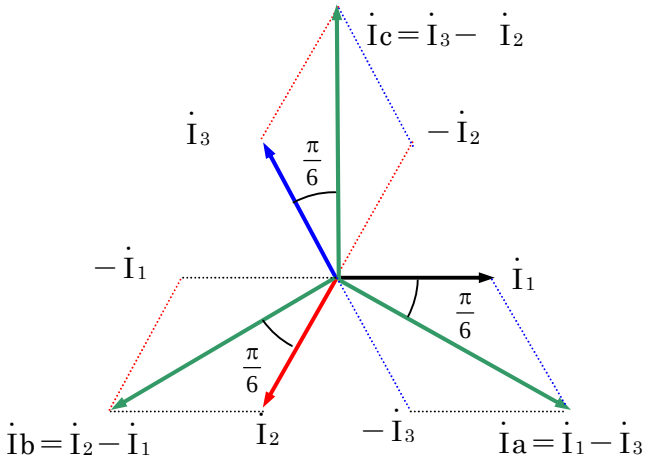


図 5.25

Δ－Δ結線では、相電圧と線間電圧は同じですが、線電流は相電流の$\sqrt{3}$倍となり、位相も$\frac{\pi}{6}$遅れます。

相電圧＝線間電圧
線電流＝$\sqrt{3}$×相電流

線電流は相電流に対して$\frac{\pi}{6}$位相が遅れる

(4) Δ－Δ結線における電圧と電流の考え方

図 5.26 のように単相に分解して単相交流と同様に計算を行う。

平衡三相交流とすれば、各相の電圧、電流の位相差は同じなので、位相差を θ とすれば、相電圧と相電流の位相差は、次の様になります。

① 回路図

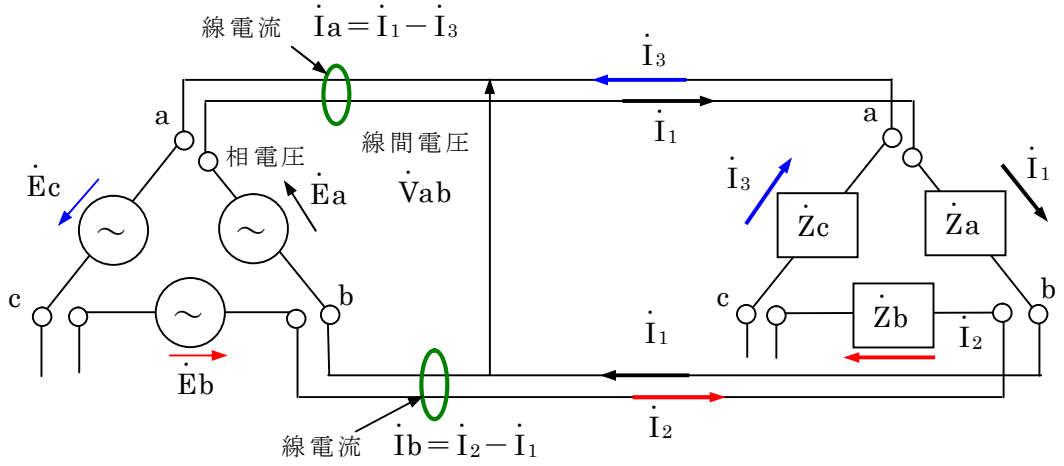
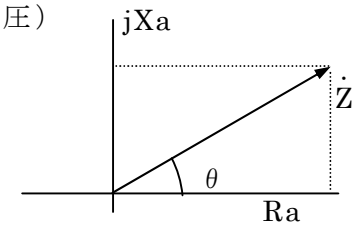


図 5.26

相電流　$I1=\dfrac{相電圧\ Ea}{インピーダンス}$（相電圧＝線間電圧）

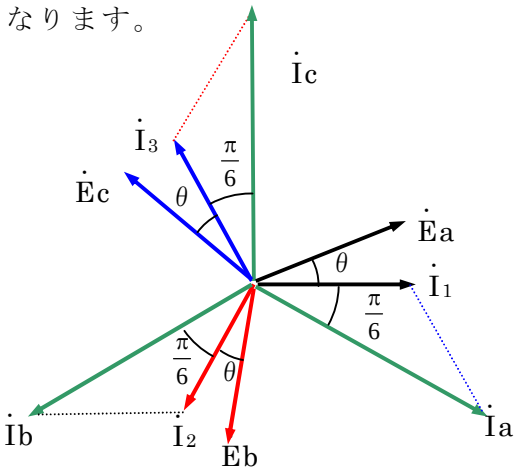
相電圧と相電流の位相　$\theta=\tan^{-1}\dfrac{Xa}{Ra}$

（$\dot{Z}a=Ra+jXa$）



② ベクトル図

Δ―Δ結線における電圧と電流の位相差は、図 5.27 のベクトル図のようになります。



$$Ia=\frac{Ea}{Za}$$

$$Ib=\frac{Eb}{Zb}$$

$$Ic=\frac{Ec}{Zc}$$

図 5.27

Δ-Δ結線における相電流と線電流の位相差は $\frac{\pi}{6}$（線電流が相電流より遅れる。）

相電圧と線電流の位相差は $\frac{\pi}{6}+\theta$（線電流が相電圧より遅れる。）となる。

(5) V－Δ結線

電源側V結線、負荷側Δ結線における電圧と電流の関係は、図 5.28、29 のようになります。

① 回路図

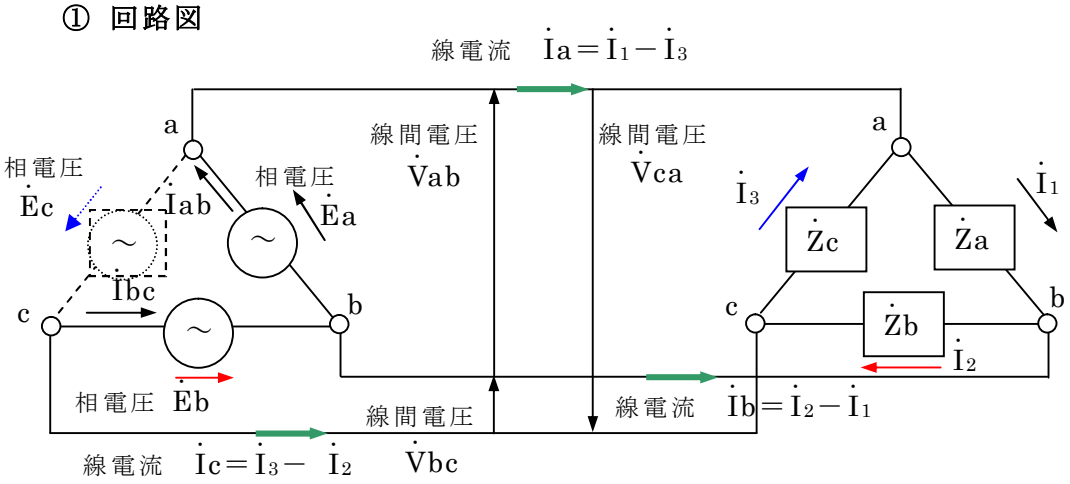
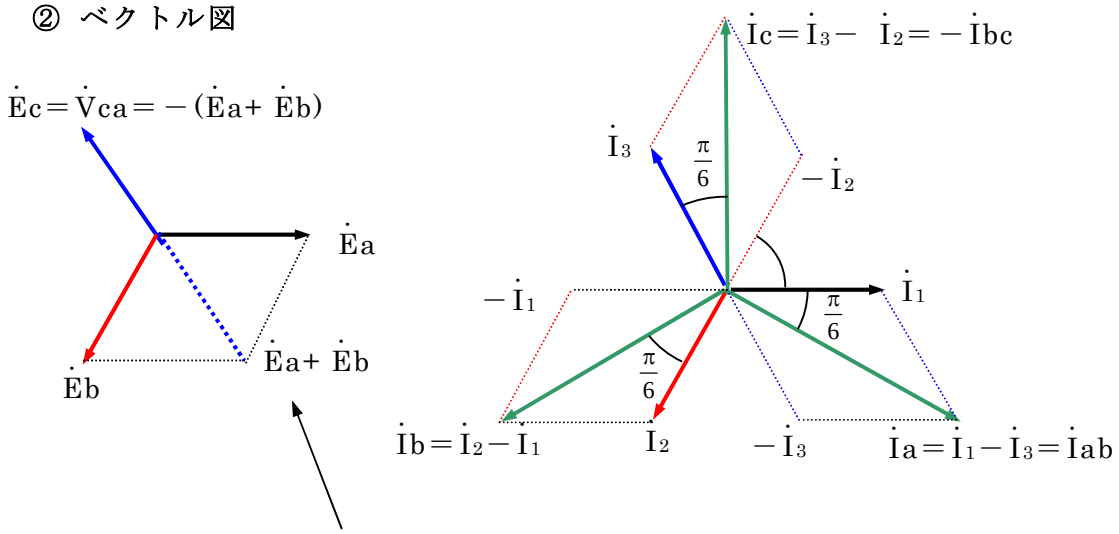


図 5.28

② ベクトル図



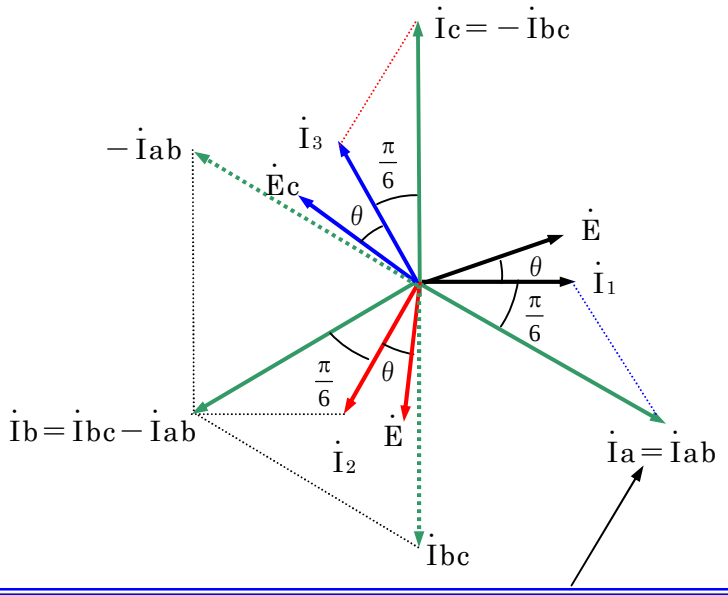
V－Δ結線では、相電圧と線間電圧が同じになりますが、電源の無い相（$\dot{E}c$）は他の相電圧の和の逆となります。

図 5.29

(6) Ｖ－Δ結線における電圧と電流の考え方

図５・２８において、電源側の相電流 $\dot{I}ab$ は線電流 $\dot{I}a$ に等しく、$\dot{I}bc$ は線電流 $\dot{I}c$ の反対向きの電流に等しくなります。

従って、電圧と電流の関係は、図 5.30 のようになります。



電源側から見ると、線電流が電源側の相電流となるため、同一電源の場合のΔ結線に対するＶ結線の容量は、57.7％（＝1/√3）となります。

図 5.30

（補足）

電源に単相変圧器３台を使用した場合のΔ結線に対するＶ結線の比較

・Δ結線出力 ＝ 3×相電圧×相電流 ＝ 3×線間電圧×線電流／√3

＝ √3×線間電圧×線電流

（相電圧 ＝ 線間電圧、線電流 ＝ √3・相電流）

・Ｖ結線出力 ＝ √3×線間電圧×線電流 ＝ √3×線間電圧×相電流

（線電流 ＝ 相電流）

Δ／Ｖ容量比

$$\frac{\text{V 結線出力}}{\text{Δ 結線出力}}=\frac{\sqrt{3}\times\text{線間電圧}\times\text{相電流}}{3\times\text{線間電圧}\times\text{相電流}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=0.577$$

利用率

$$\frac{\text{V 結線出力}}{\text{Δ 結線出力}}=\frac{\sqrt{3}\times\text{線間電圧}\times\text{相電流}}{2\times\text{線間電圧}\times\text{相電流}}=\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866$$

第６章　交流の基本的な性質

１．交流の抵抗には３つの種類がある。

(1) 直流抵抗

直流抵抗に正弦波電圧を印加すると、図 6.1 のような同相の正弦波電流が流れます。

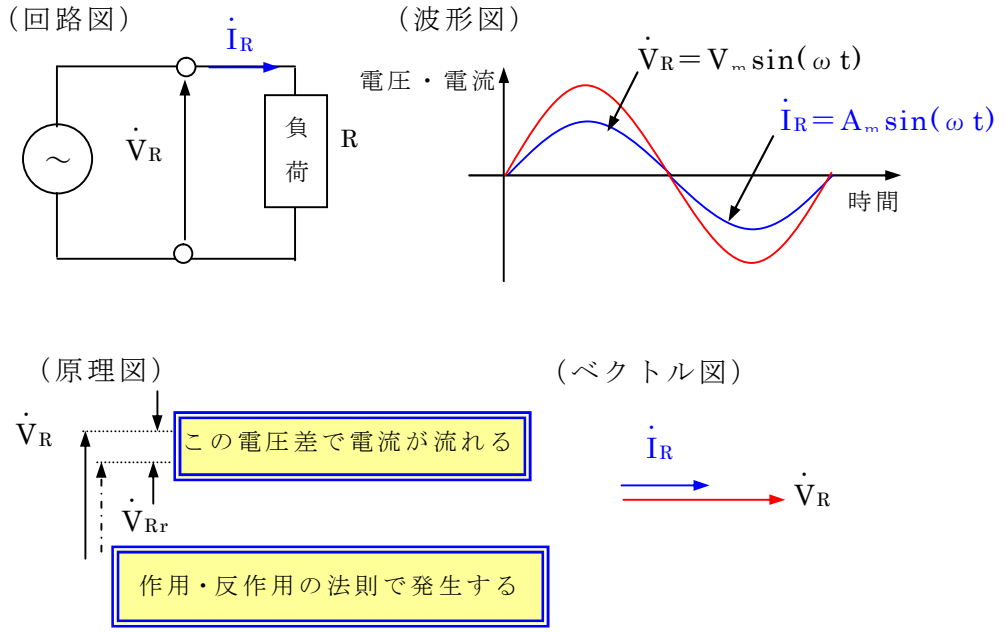


図 6.1

(2) 交流抵抗（X_L：誘導性リアクタンス）

インダクタンス L のコイルに正弦波電圧を印加すると、電磁誘導作用により、電流の流れを妨げるような方向に逆起電力が発生します。この時の磁束を ϕ とすると、逆起電力 V_{Lr} は、

$$V_{Lr} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -L\frac{\Delta I_L}{\Delta t}$$

となります。

つまり、V_{Lr} は I_L の時間的変化の割合に比例することになり、I_L の変化が最大の時は V_{Lr} は最大に、I_L の変化がゼロの時は V_{Lr} もゼロとなります。

以上のことから、V_{Lr} は図 6.2 のように I_L より 90° 位相の遅れた正弦波電圧となります。

そうして、このコイルに電流を流し続けるためには、V_{Lr} と反対の位相の正弦波電圧 V_L が必要となります。

V_L は I_L より 90° 位相の進んだ正弦波電圧、つまり、I_L は V_L よりも 90° 位相の遅れた正弦波電流となります。

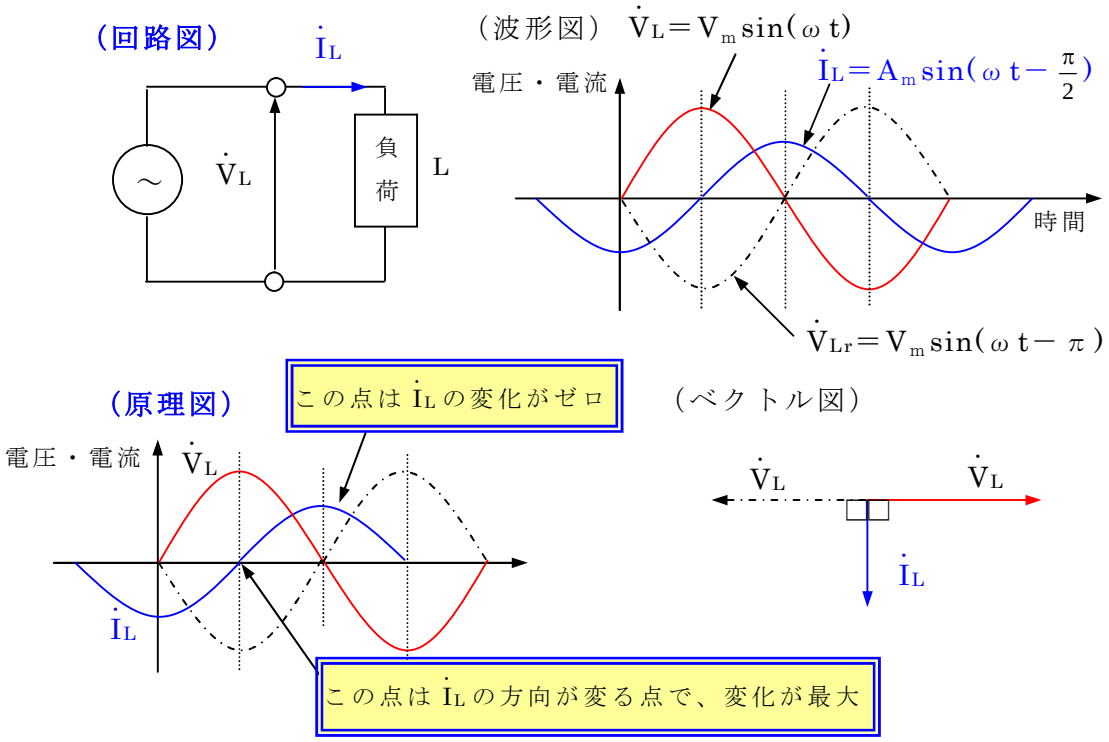


図 6.2

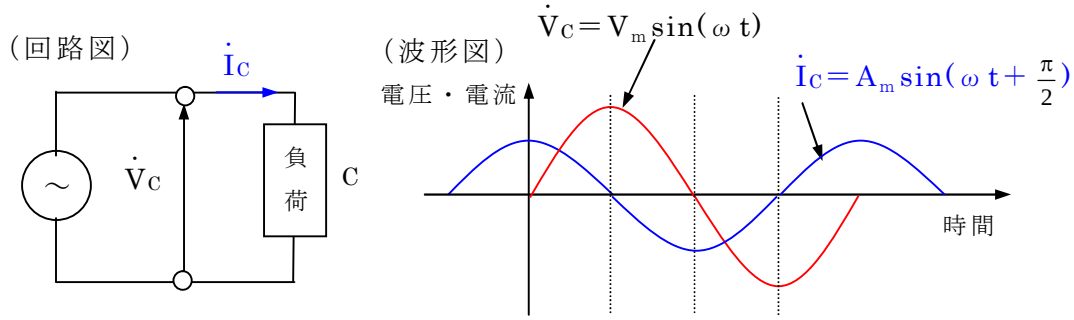
(3) 交流抵抗（X_C：容量性リアクタンス）

コンデンサ C には、電荷 q を蓄えたり放出したりする働きがあり、流れる電流は C に加わる電圧の時間的変化の割合に比例し、

$$Ic = \frac{\Delta q}{\Delta t} = C\frac{\Delta Vc}{\Delta t}$$

となります。

図 6.3 のように V_C がゼロから上昇しようとする時は、時間的変化の割合は最大値となり、I_C も最大となります。また、正弦波電圧 V_C が最大の時は、時間的変化の割合がゼロとなり I_C もゼロとなります。このように I_C は印加電圧より 90° 位相の進んだ正弦波電流となります。



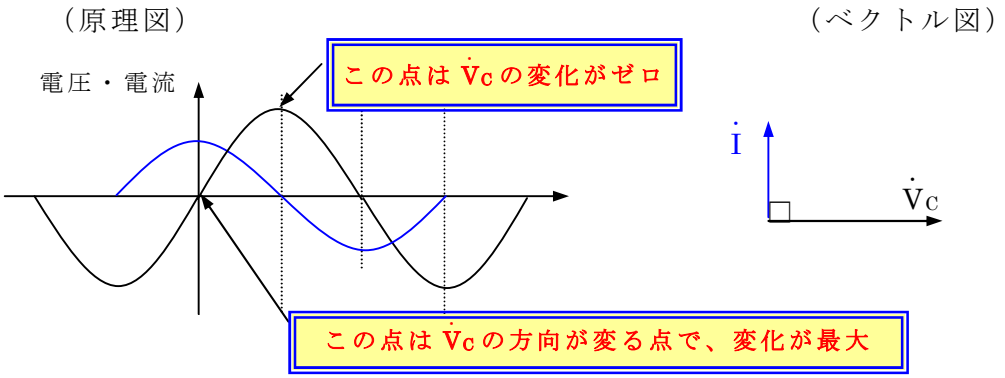


図 6.3

(4) 3つをベクトル的に合成したインピーダンス（Z[Ω]）

インダクタンス L とキャパシタンス C と抵抗 R の組合せ（電圧と電流間の位相差・周波数を考慮した値）をインピーダンスと称し、直流回路における抵抗と同等の計算を行います。

インピーダンスを複素数の実部と虚部で表した場合（Z＝R＋jX）の X をリアクタンスといいます。

リアクタンスが正（誘導性リアクタンス）の時、電圧は電流に比較して進み位相となり、負（容量性リアクタンス）の時、電流は電圧に比較して進み位相となります。例えば、図 6.4 において、RLC 直列回路におけるインピーダンスは次のようになります。

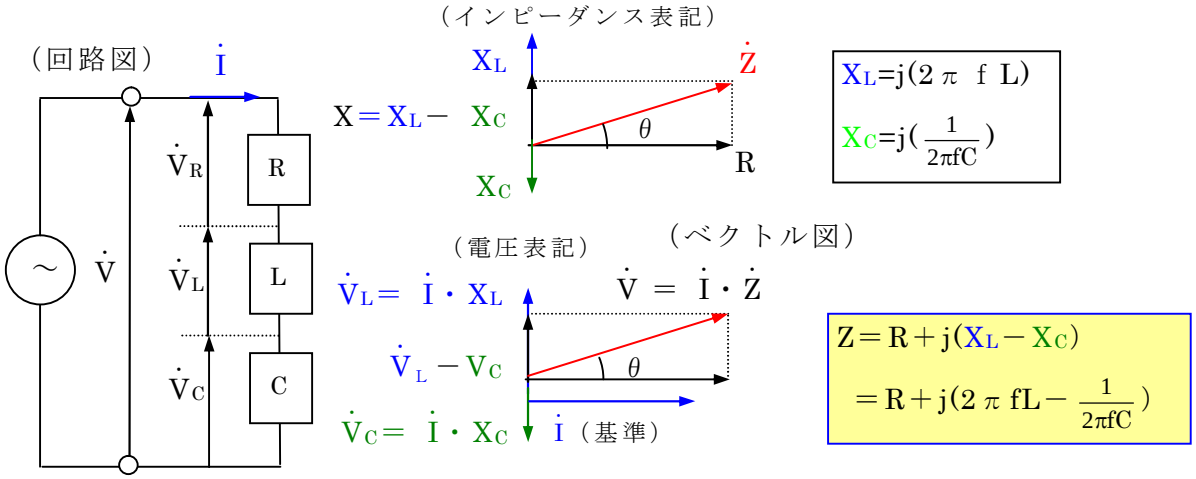


図 6.4

なお、インピーダンスの逆数をアドミタンスといいます。

アドミタンスを複素数の実部と虚部で表現した場合（Y＝G＋jB）の G をコンダクタンス、B をサセプタンスといいます。例えば、図 6.5 において、RLC 並列回路におけるアドミタンスは次のようになります。

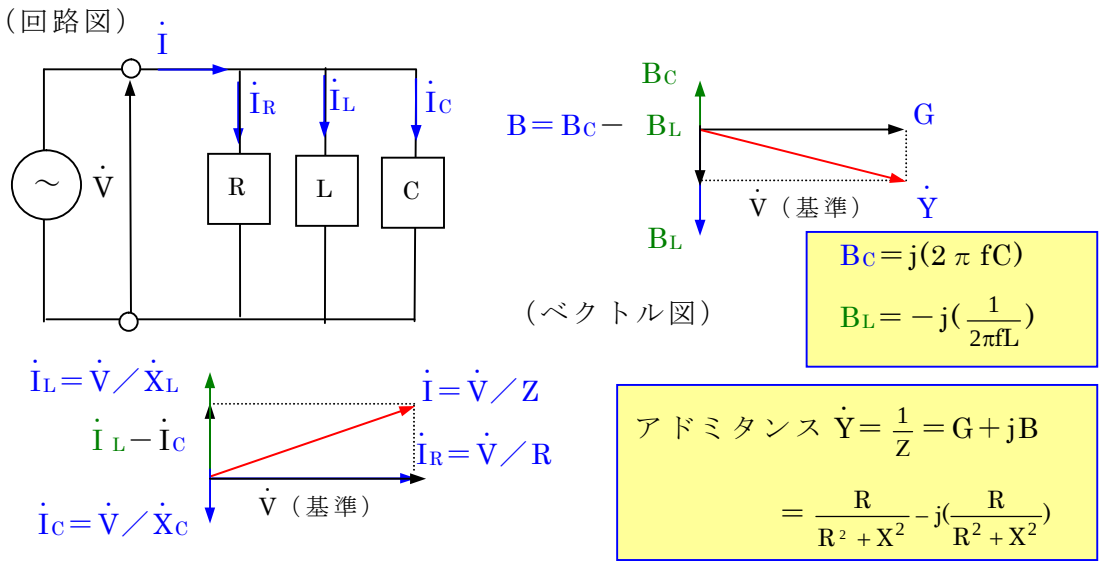


図 6.5

2．交流の電気を抵抗、誘導性リアクタンス、容量性リアクタンスに流したときの電圧と電流の関係

交流回路の負荷が抵抗、誘導性リアクタンス及び容量性リアクタンスの場合、その組合せが直列・並列によってインピーダンスは、図 6.6～図 6.11 の様になります。

(1) 直列回路

① RL 直列回路

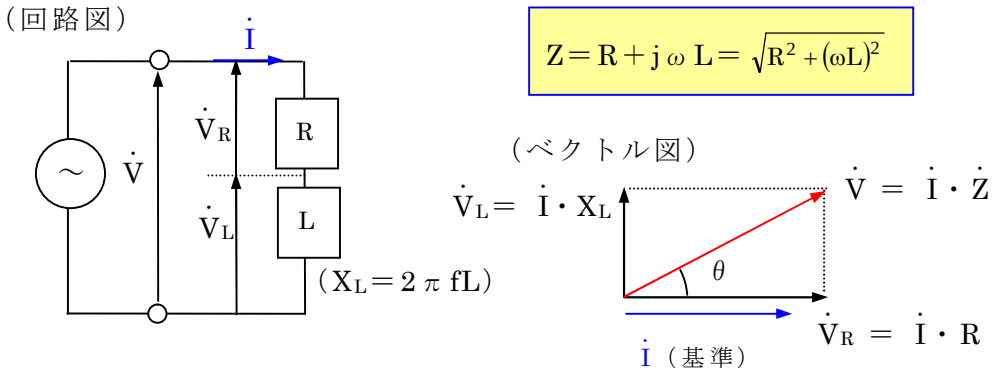


図 6.6

② RC 直列回路

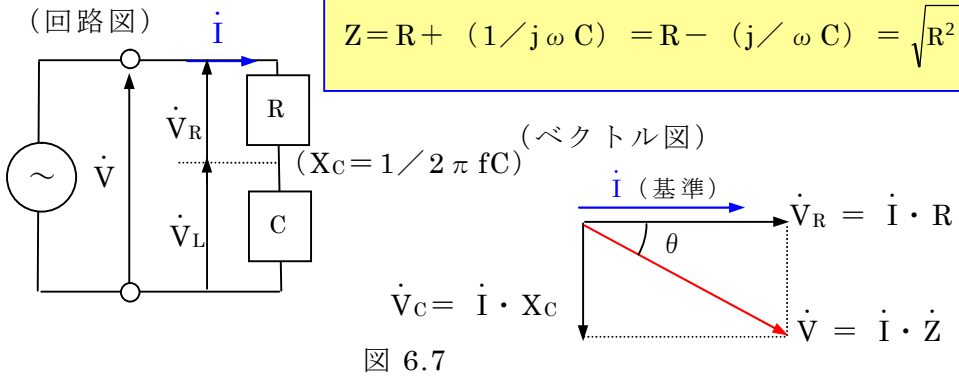


図 6.7

③ RLC 直列回路

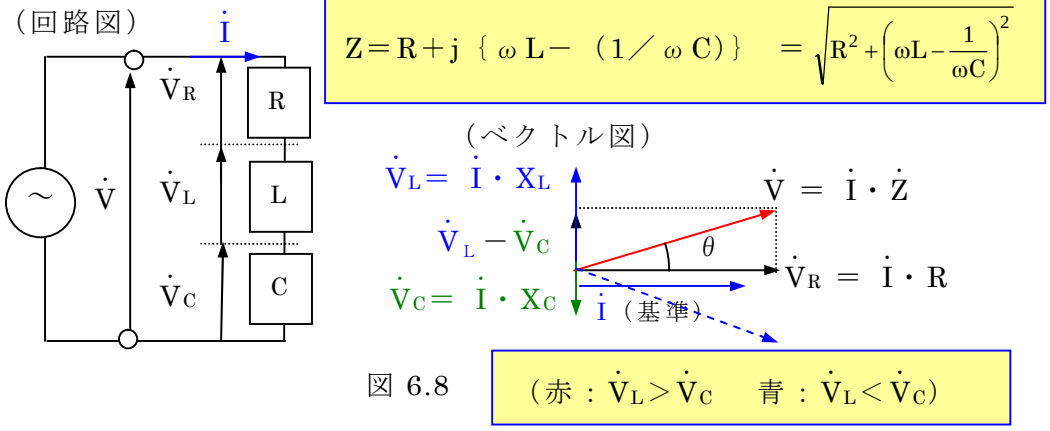


図 6.8

(2) 並列回路

① RL 並列回路

$$Z = R \cdot j\omega L / (R + j\omega L) = 1 / \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

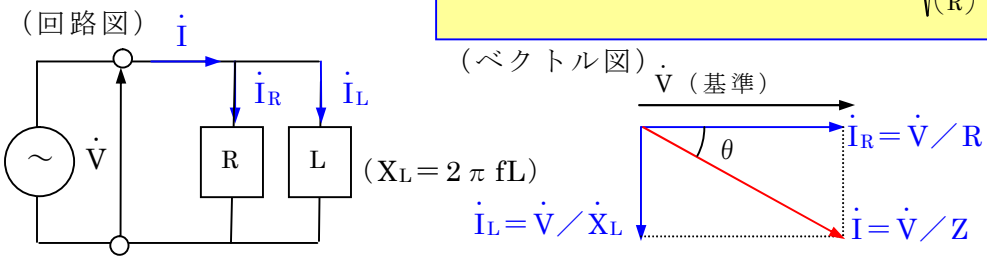


図 6.9

② RC 並列回路

$$Z = R / (R \cdot j\omega C + 1) = 1 / \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}$$

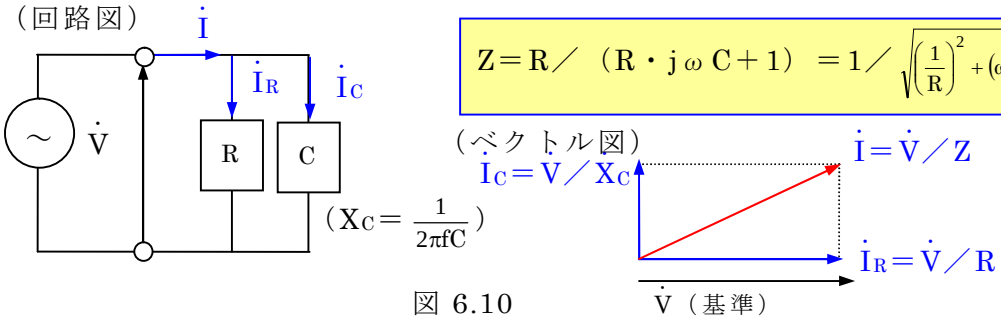


図 6.10

③ RCL 並列回路

$$Z = R \cdot j\omega L / \{R + j\omega L (1 + R \cdot \omega C)\}$$

$$= 1 / \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

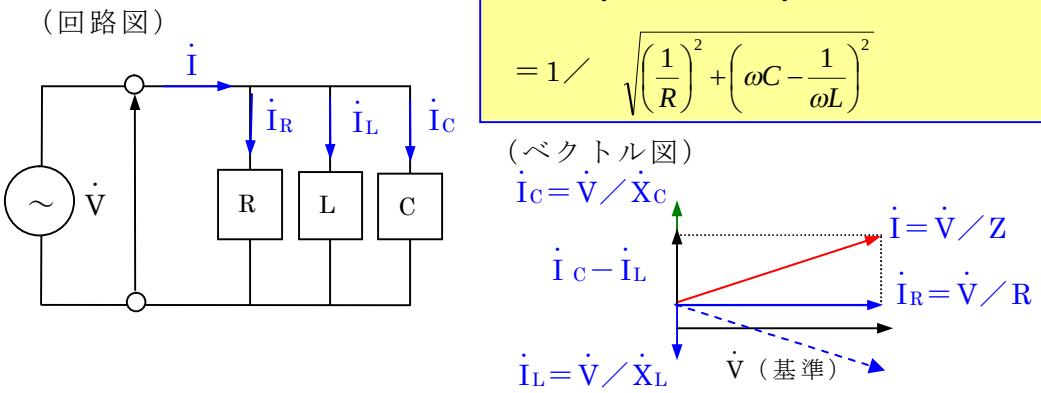


図 6.11

（赤：$\dot{I}_C > \dot{I}_L$　青：$\dot{I}_C < \dot{I}_L$

第７章　交流の電力と電力量

１．交流の電力には３種類がある。

電力とは、単位時間に電流がする仕事量のことで、単位には〔W〕を使用します。

また、ある時間内における電力の積算総和を電力量といい、単位には〔Wh〕を使用します。交流電力は、交流電圧と電流の積で表され、単に電圧と電流の積を皮相電力、電圧と電流の位相差、すなわち、力率による電力は、有効電力と無効電力に分けられます。電力のイメージを単相交流で表した場合、図 7.1～5 に表されます。

(1) 電圧と電流が同相の場合の電力波形

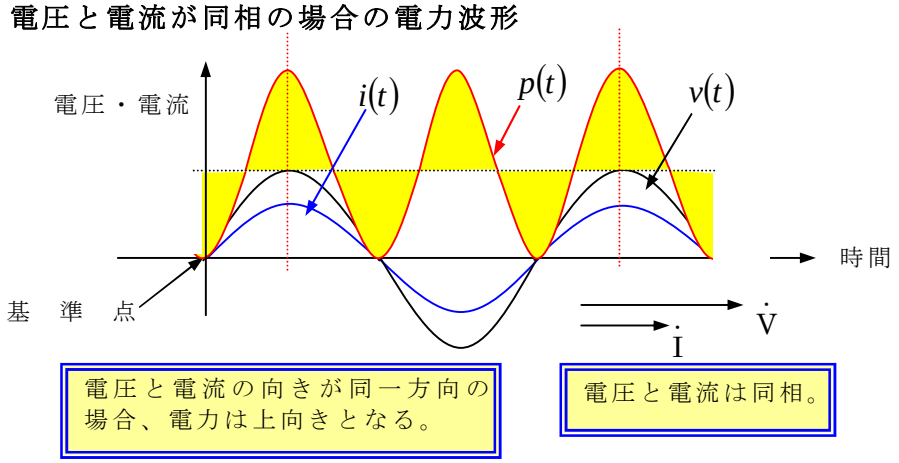


図 7.1.1

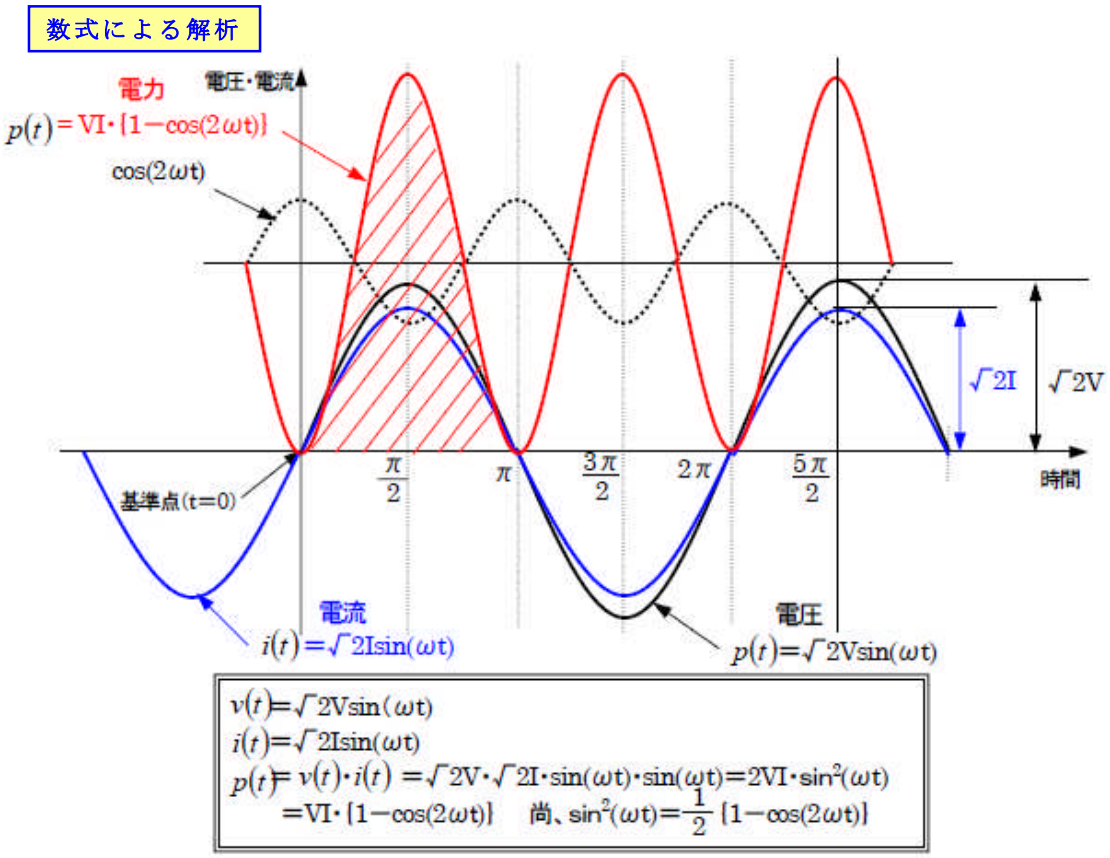


図 7.1.2

(2) 電流が電圧より $\frac{\pi}{2}$ 遅れている場合

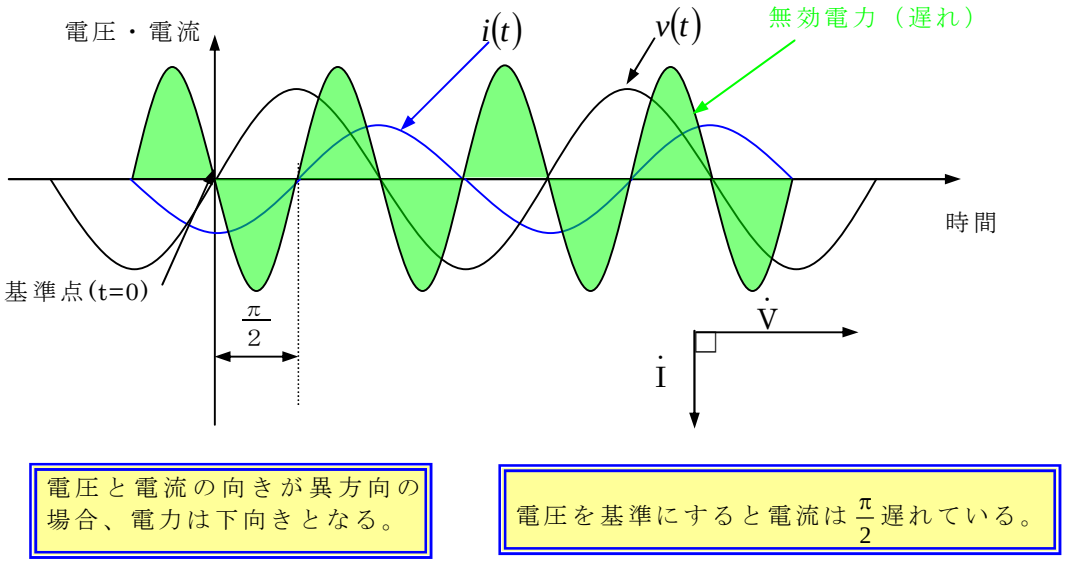
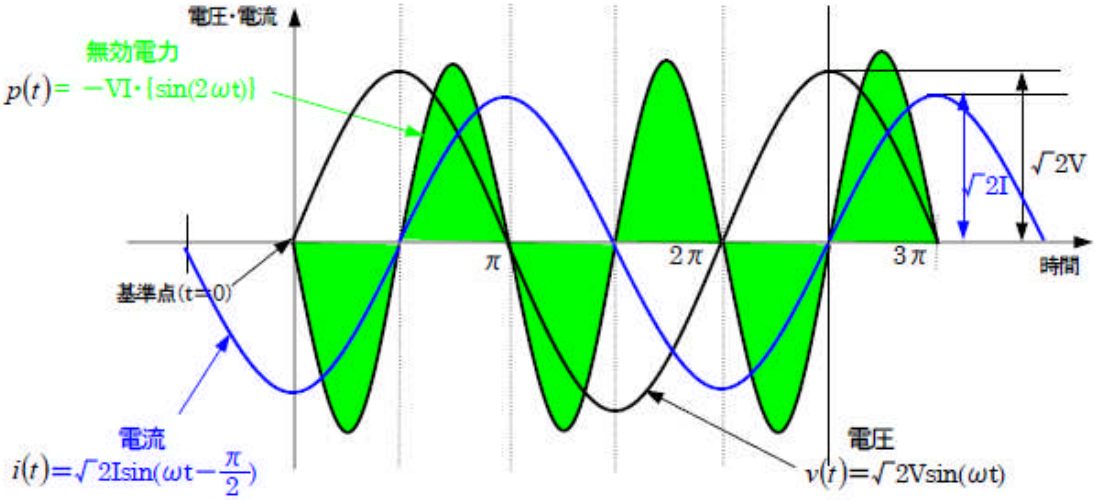


図 7.2.1

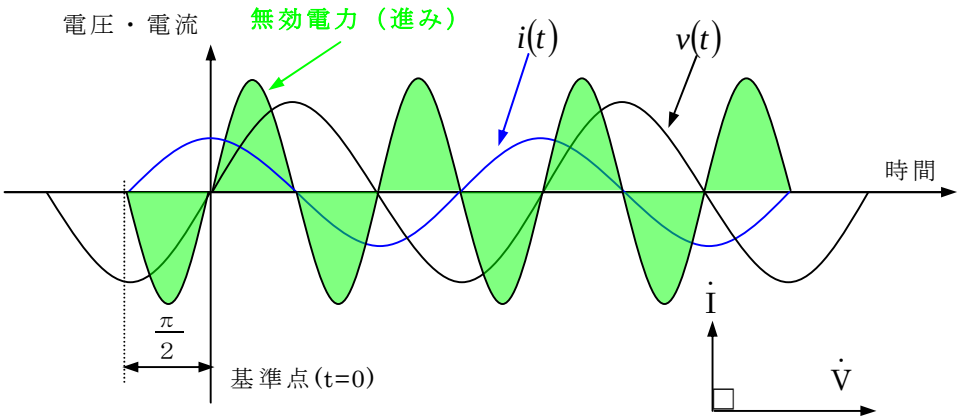
数式による解析



$$v(t)=\sqrt{2}V\sin(\omega t)$$
$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t-\frac{\pi}{2})=-\sqrt{2}I\cos(\omega t)$$
$$p(t)=v(t)\cdot i(t)=\sqrt{2}V\cdot\sqrt{2}I\cdot\sin(\omega t)\cdot\{-\cos(\omega t)\}=-2VI\cdot[\frac{1}{2}\{\sin(2\omega t)\}]$$
$$=-VI\cdot\{\sin(2\omega t)\}\quad 尚、\sin(\omega t)\cdot\{-\cos(\omega t)\}=-\frac{1}{2}\{\sin(2\omega t)\}$$

図 7.2.2

(3) 電流が電圧より $\frac{\pi}{2}$ 進んでいる場合

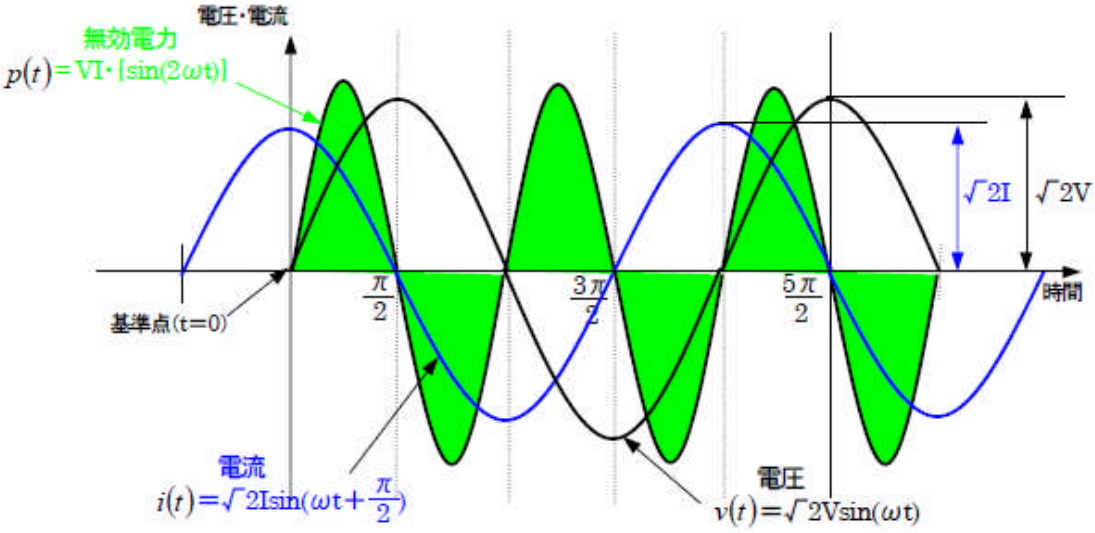


電圧と電流の向きが異方向の場合、電力は下向きとなる。

電圧を基準にすると電流は $\frac{\pi}{2}$ 進んでいる。

図 7.3.1

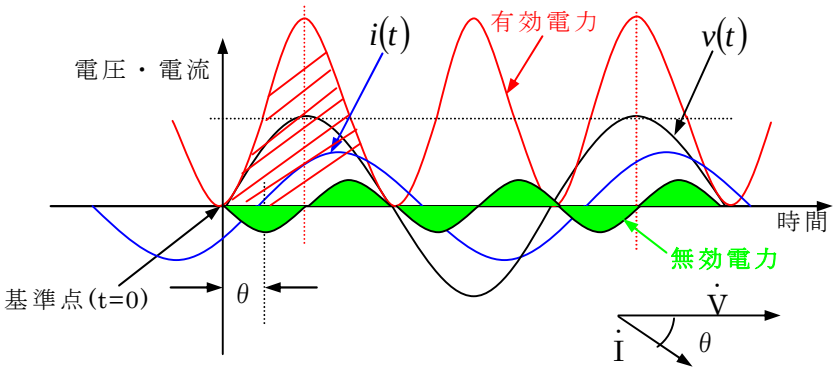
数式による解析



$$v(t)=\sqrt{2}V\sin(\omega t)$$
$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})=\sqrt{2}I\cos(\omega t)$$
$$p(t)=v(t)\cdot i(t)=\sqrt{2}V\cdot\sqrt{2}I\cdot\sin(\omega t)\cdot\cos(\omega t)=2VI\cdot[\frac{1}{2}\{\sin(2\omega t)\}]$$
$$=VI\cdot\{\sin(2\omega t)\}\quad 尚、\sin(\omega t)\cdot\cos(\omega t)=\frac{1}{2}\{\sin(2\omega t)\}$$

図 7.3.2

(4) 電流が電圧より θ 遅れている場合

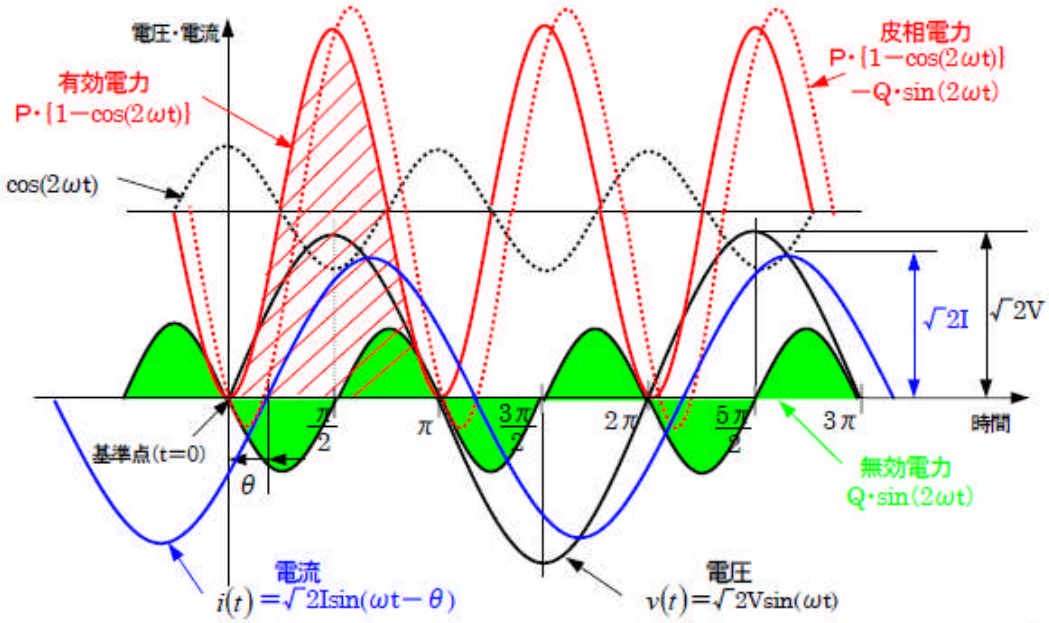


電圧と電流の向きが異方向の場合、電力は下向きとなる。

電圧を基準にすると電流は θ 遅れている。

図 7.4.1

数式による解析



$v(t)=\sqrt{2}V\sin(\omega t)$

$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t-\theta)$

$p(t)=v(t)\cdot i(t)=\sqrt{2}V\cdot\sqrt{2}I\cdot\sin(\omega t)\cdot\sin(\omega t-\theta)=2VI\cdot[\frac{1}{2}\ [\cos(2\omega t-\theta)-\cos\theta]]$

$=VI\cdot[\cos\theta-\cos(2\omega t-\theta)]$ ここで、$\cos(2\omega t-\theta)=\cos(2\omega t)\cdot\cos\theta+\sin(2\omega t)\cdot\sin\theta$

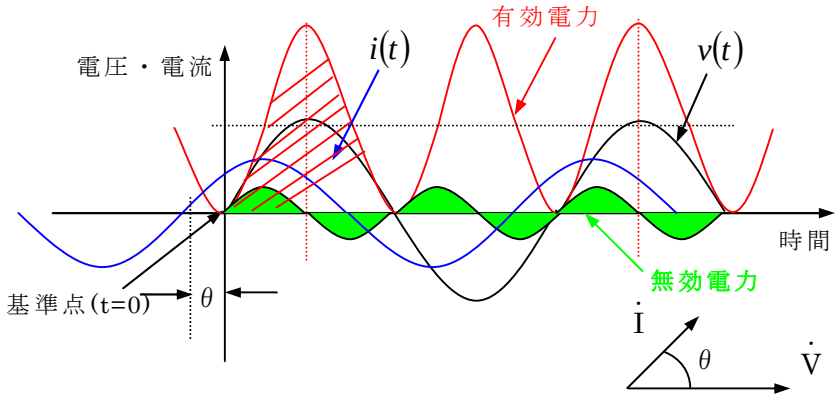
従って、$P(t)=VI\cdot[\cos\theta-\cos(2\omega t)\cdot\cos\theta-\sin(2\omega t)\cdot\sin\theta]$

$P=VI\cdot\cos\theta$、$Q=VI\cdot\sin\theta$ とおくと、

$p(t)=P\cdot[1-\cos2(\omega t)]-Q\cdot\sin(2\omega t)$

図 7.4.2

(5) 電流が電圧より θ 進んでいる場合

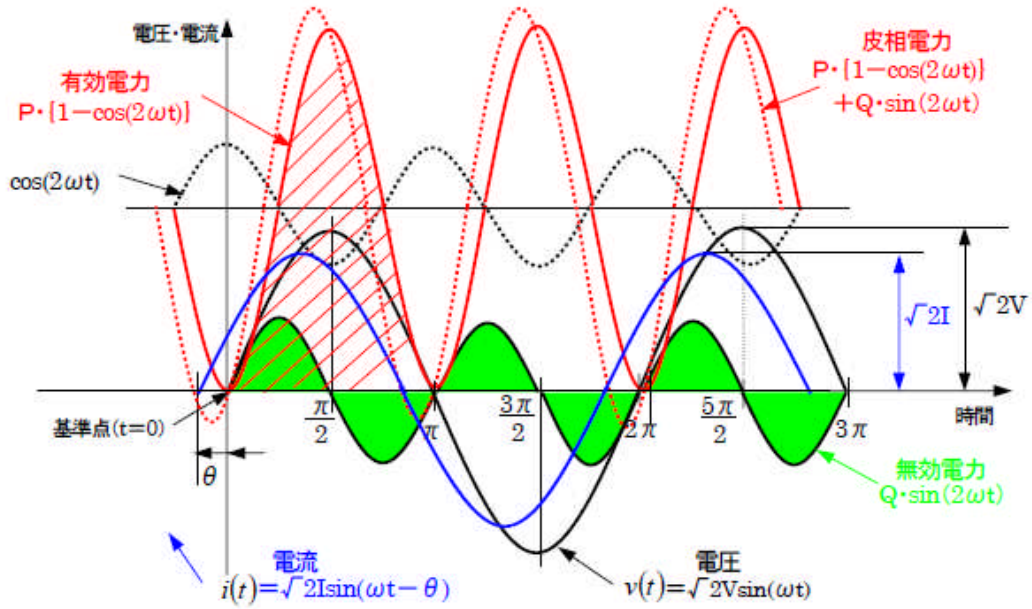


電圧と電流の向きが異方向の場合、電力は下向きとなる。

電圧を基準にすると電流は θ 進んでいる。

図 7.5.1

数式による解析



$v(t) = \sqrt{2}V\sin(\omega t)$

$I(t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t+\theta)$

$p(t) = v(t)\cdot i(t) = \sqrt{2}V\cdot\sqrt{2}I\cdot\sin(\omega t)\cdot\sin(\omega t+\theta) = 2VI\cdot[-\frac{1}{2}[\cos(2\omega t+\theta)-\cos\theta]]$

$= VI\cdot[\cos\theta - \cos(2\omega t+\theta)]$　ここで、$\cos(2\omega t+\theta) = \cos(2\omega t)\cdot\cos\theta - \sin(2\omega t)\cdot\sin\theta$

従って、$p(t) = VI\cdot[\cos\theta - \cos(2\omega t)\cdot\cos\theta + \sin(2\omega t)\cdot\sin\theta]$

$P = VI\cdot\cos\theta$、$Q = VI\cdot\sin\theta$ とおくと、

$p(t) = P\cdot[1-\cos2(\omega t)] + Q\cdot\sin(2\omega t)$

図 7.5.2

２．皮相電力とは何をする電力

直流の場合、無駄になる電力が無く、全てが有効に電力として使用されましたが、交流の場合、コイルやコンデンサでは電圧と電流の位相がずれるため、実際に有効な電力として消費されない無効電力が発生します。

このため、交流回路では、電力を皮相電力、有効電力及び無効電力で表します。

皮相電力は、単純に電圧の実効値と電流の実効値をかけただけの電力であり、単位は[VA：ボルトアンペア]で量記号は S で表します。

(1) 皮相電力、有効電力及び無効電力の関係

なお、図 7.6 は、単相交流回路での関係を表しています。

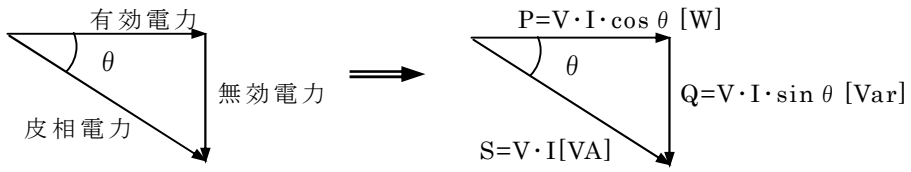


図 7.6

① 皮相電力＝√｛(有効電力)^2＋（無効電力）^{2} ｝

② θ を位相のずれ、cos θ を力率といい、cos θ ＝有効電力／皮相電力となります。

上記の関係は、位相のずれが少なければ少ない（力率が良い）ほど使える電力（有効電力）が大きくなり、位相のずれが大きい（力率が悪い）ほど少なくなることを表しています。

また、電流を電圧と同相分と 90°遅れ電流に分解すると、図 7.7 のように表せます。

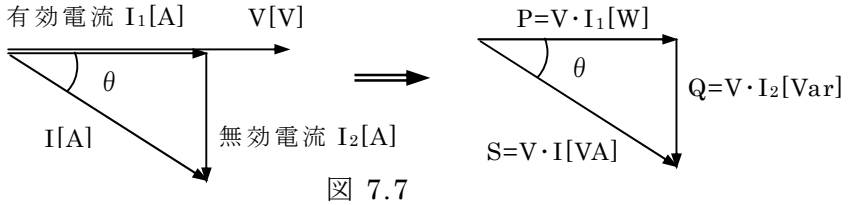


図 7.7

(2) 電力から見た実効値について

交流の電圧と電流の値は常に変化しているので、その大きさを表現する方法として実効値での表現方法があり、実効値は、「直流の電圧と電流を供給したときに発生する電力と交流の電圧と電力を供給したときに発生する電力（平均電力）が同じ値になるようにした交流の電圧と電流」と定義されます。交流の電気に関する規定や計算に使用される電圧及び電流は、普通、実効値で表現されます。

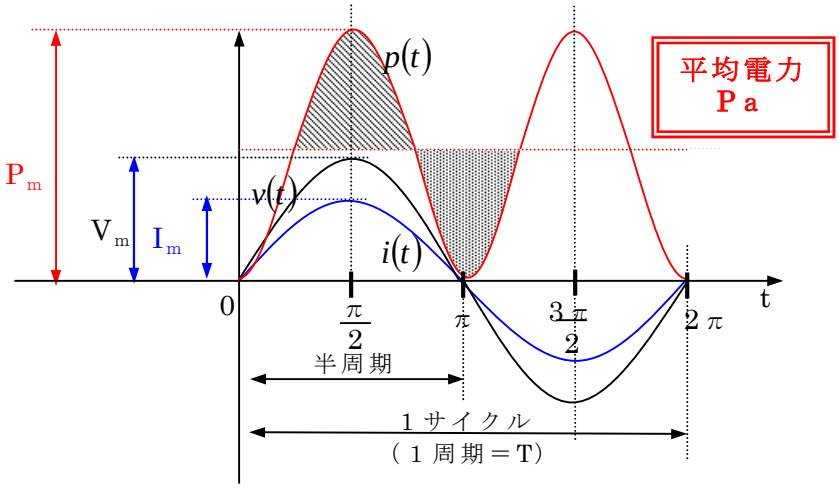


図 7.8

（参考）

$v(t) = V_m \sin \omega t$

$i(t) = I_m \sin \omega t$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = \frac{(V_m \cdot I_m)}{2}\{1 - \cos 2(\omega t)\}$$

$$Pa = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} P(t)dt$$

$$= \frac{(V_m \cdot I_m)}{2} \cdots\cdots(1)$$

$$= \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdots\cdots(2)$$

三角関数の積和の定理からこの式になります。

$$\sin \omega t \cdot \sin \omega t = \frac{\{1 - \cos 2(\omega t)\}}{2}$$

P(t)を半周期（0～π）まで積分して、半周期の平均を取ることを表しています。

積分の結果から、$V_m \cdot I_m$の積の半分になります。

図 7.8 の▨と▨が等しくなります。

式(1)を変形すると式(2)になり、V_mと I_mを$\sqrt{2}$で割った値（＝実効値）の積となります。

図 7.8 において、電力の瞬時値 P(t)＝v(t)･i(t)を計算し、半周期（＝T/2）を積分したものを平均すると、交流の平均電力が得られます。平均電力の数式を見ると、電圧及び電流の最大値の積の 1/2、すなわち、最大値を 2 の平方根で割ったものの積に等しくなります。従って、交流の電力計算でも電圧と電流の実効値によって算出できます。

3．有効電力とは何をする電力

有効電力は、機器（負荷）によって実際に消費され、単位は（W：ワット）で、量記号は P で表されます。

また、電力料金請求の対象量となります。

４．無効電力とは何をする電力

無効電力は、機器（負荷）によって消費されず、機器と電源の間を往復するだけの電力であり、単位は（Var：バール）で量記号は Q で表されます。また、無効電力は図 7.9 のように負荷によって「遅れ無効電力」、「進み無効電力」が発生します。

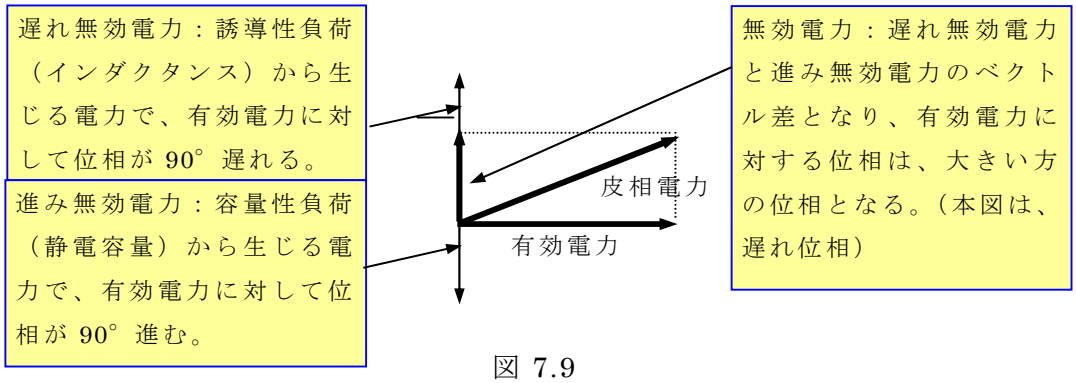


図 7.9

５．電力の計算式

皮相電力、有効電力及び無効電力の関係は、図 7.10 のようになり、計算式は表 7.1 になります。

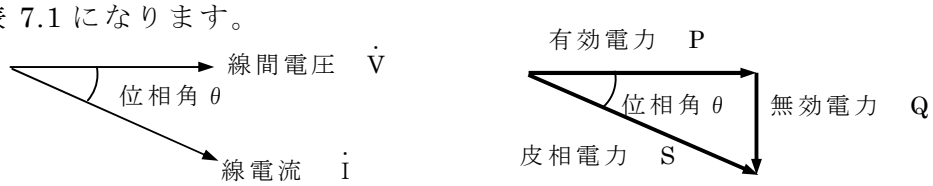
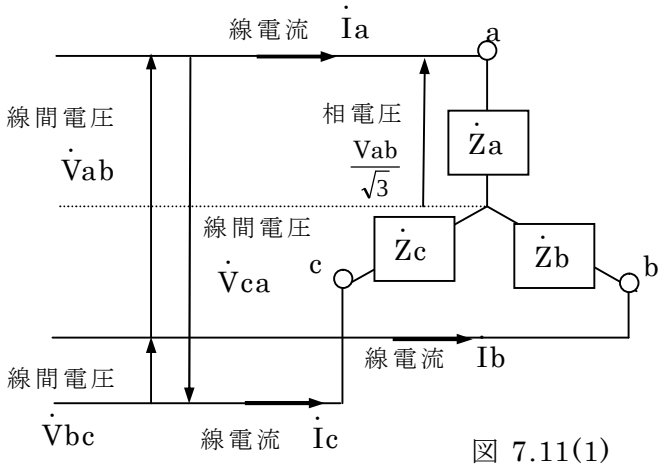


図 7.10

表 7.1

相数	皮相電力	有効電力	無効電力
単相電力	S=V･I[VA]	P=V･I･cos θ [W]	Q=V･I･sin θ [Var]
三相電力	S=√3･V･I[VA]	P=√3･V･I･cos θ [W]	Q=√3･V･I･sin θ [Var]

なお、(1) 三相電力の場合、次の二通りの考え方があり、結果として表 7.2 のようになります。（Y 結線の例で説明します。）



電源が対称三相交流の場合、線間電圧 Vab、Vbc、Vca＝V とする。
電源が対称三相交流で、負荷が平衡負荷の場合、
線電流 Ia、Ib、Ic＝ I とする。

図 7.11(1)

①電源が対称三相交流で、負荷が平衡負荷の平衡三相交流回路の場合
②各相毎に電力を計算する場合

表 7.2

	皮相電力	有効電力	無効電力
①	√3×線間電圧×線電流 S=√3・V・I [VA]	√3×線間電圧×線電流×力率 P=√3・V・I・cos θ [W]	√3×線間電圧×線電流×無効率 Q=√3・V・I・sin θ [Ver]
②	a 相皮相電力（相電圧×相電流）＋b 相皮相電力＋c 相皮相電力 S= {(Vab/√3)・Ia} + {(Vbc/√3)・Ib} + {(Vca/√3)・Ic} (注)①の場合、上式は S=3・(V/√3)・I =√3・V・I [VA]	a 相有効電力（相電圧×相電流×力率）＋b 相有効電力＋c 相有効電力 P={(Vab/√3)・Ia・cos θ $_1$} + {(Vbc/√3)・Ib・cos θ $_2$} + {(Vca/√3)・Ic・cos θ $_3$} (注)①の場合、上式は P=3・(V/√3)・I・cos θ =√3・V・I・cos θ [W]	a 相無効電力（相電圧×相電流×無効率）＋b 相無効電力＋c 相無効電力 Q={(Vab/√3)・Ia・sin θ $_1$} + {(Vbc/√3)・Ib・sin θ $_2$} + {(Vca/√3)・Ic・sin θ $_3$} (注)①の場合、上式は Q=3・(V/√3)・I・sin θ =√3・V・I・sin θ [Ver]

(1) 平衡三相交流回路の三相電力の計算式

①図 7.11(1)において、平衡三相交流回路の場合、三相電力は“3×相電圧×相電流“となります。

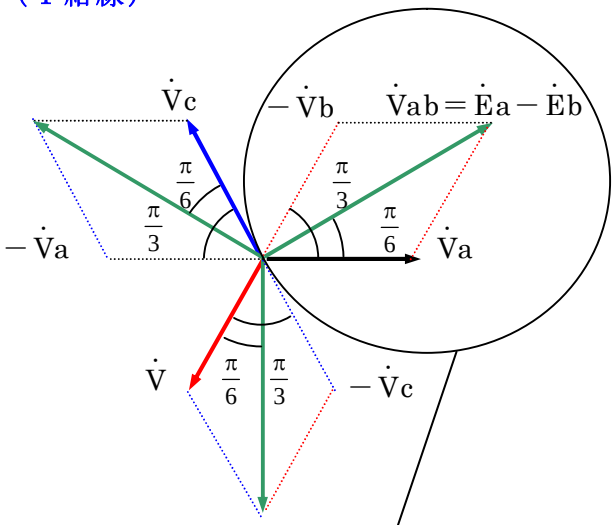
②一般的に、三相回路は負荷がＹ結線かΔ結線か不明なことがあり、また、負荷仕様は線間電圧と線電流で表示されることから、三相電力を“線間電圧×線電流”で計算します。

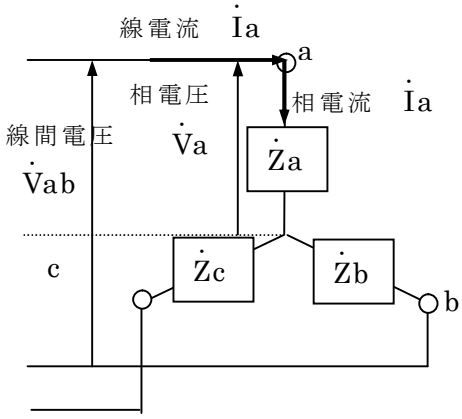
③負荷がＹ結線の場合、線電流と相電流は同じですが、相電圧は線間電圧の $\frac{1}{\sqrt{3}}$ となるので、“3×相電圧（＝線間電圧×$\frac{1}{\sqrt{3}}$⇒図 7.11(2)参照）×相電流（＝線電流）＝$\sqrt{3}$×線間電圧×線電流“となります。

④負荷がΔ結線の場合、線間電圧と相電圧は同じですが、相電流は線電流の $\frac{1}{\sqrt{3}}$ となるので、“3×相電圧（＝線間電圧）×相電流（＝線電流×$\frac{1}{\sqrt{3}}$⇒図 7.11(3)参照）＝$\sqrt{3}$×線間電圧×線電流“となります。

従って、負荷がＹ結線、Δ結線の何れであっても、平衡三相交流回路の三相電力計算式は“$\sqrt{3}$×線間電圧×線電流”となります。

（Ｙ結線）

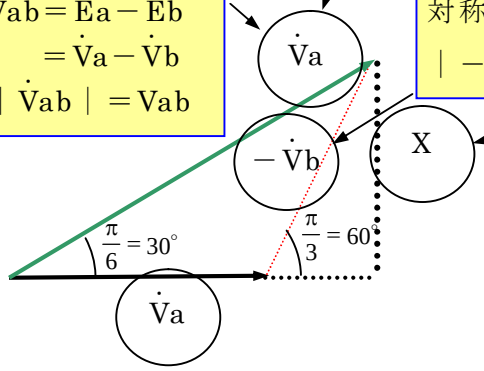




$\dot{V}ab = \dot{E}a - \dot{E}b$

$= \dot{V}a - \dot{V}b$

$|\dot{V}ab| = Vab$



対称三相交流から

$|-\dot{V}b| = |\dot{V}a| = Va$

この辺の大きさを「X」とする

$X = \sin 60^\circ \quad Va = \frac{\sqrt{3}}{2} Va$

$X = \sin 30^\circ \quad Vab = \frac{1}{2} Vab$

$\frac{\sqrt{3}}{2} Va = \frac{1}{2} Vab$

従って、

$Va = \frac{1}{\sqrt{3}} Vab$

（補足・三角関数）

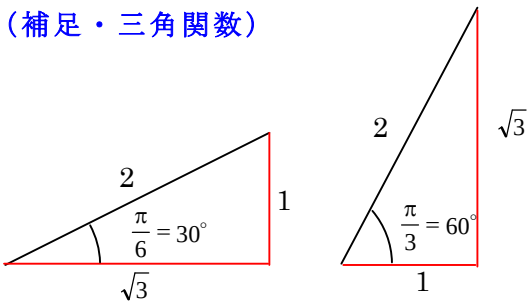
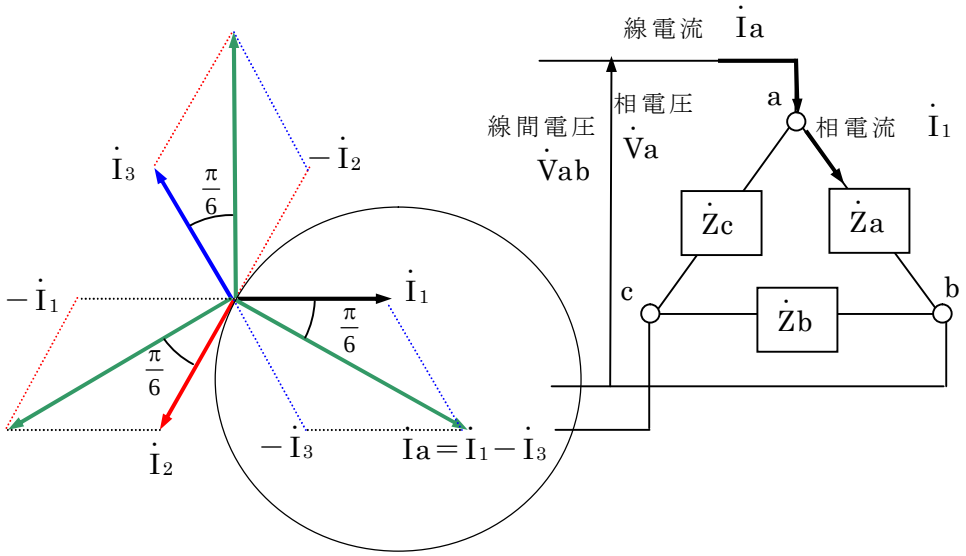
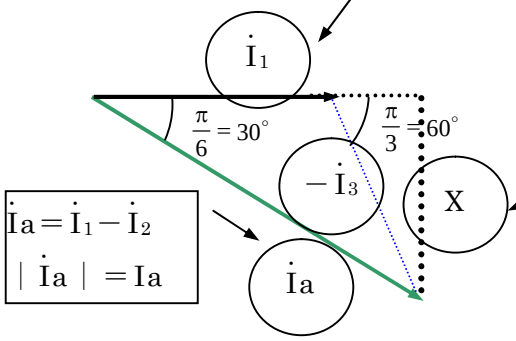


図 7.11(2)

（Δ結線）





平衡三相回路から

$|-\dot{I}_3| = |\dot{I}_1| = I_1$

この辺の大きさを「X」とする

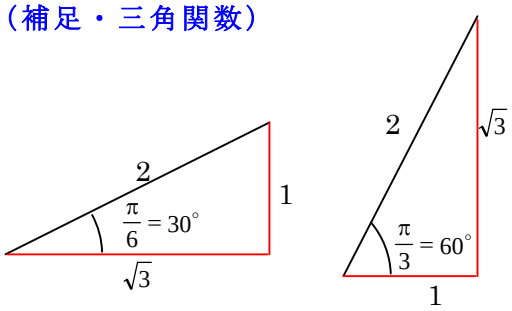
$\dot{I}a = \dot{I}_1 - \dot{I}_2$

$|\dot{I}a| = Ia$

$$X = \sin 60^\circ I_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} I_1$$

$$X = \sin 30^\circ Ia = \frac{1}{2} Ia$$

（補足・三角関数）



$$\frac{\sqrt{3}}{2} I_1 = \frac{1}{2} Ia$$

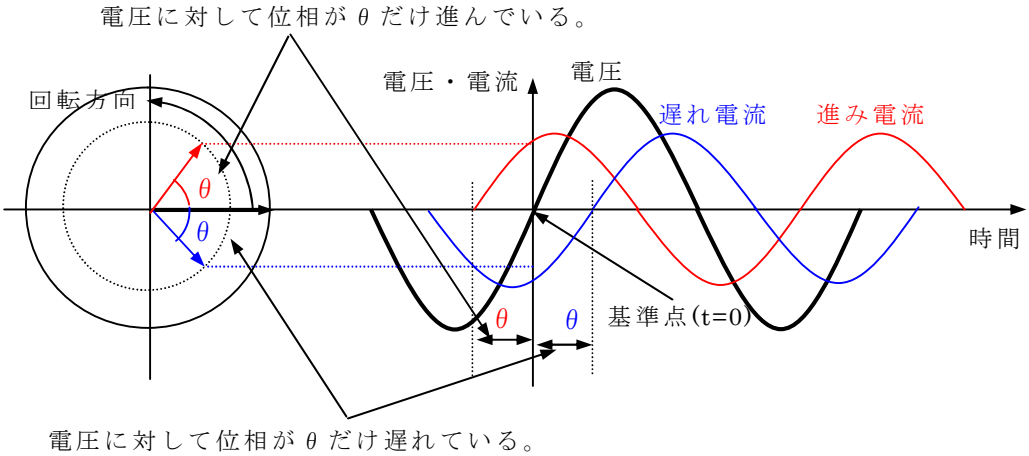
従って、

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} Ia$$

図 7.11(3)

6．力率とは

力率は、図 7.12 において、交流電圧と電流の位相差 θ〔rad〕を cos θ で表したものです。（図は、赤線電流が電圧より θ〔rad〕進み、青線電流が電圧より θ〔rad〕遅れている状態を表しています。）



位相の「進み、遅れ」は相対的なものであり、図から分かるように、ある波形が、基準とする波形の左側にあるときは位相が進み、右側にあるときには位相が遅れていることになります。

図 7.12

なお、以降の力率の説明では、電圧に対して θ だけ位相が遅れている遅れ電流を例に説明します。

7．力率の考え方

力率は、遅れ電流を電圧と同相分と電圧より 90° 遅れ分に分解して、次の様に求められます。

電圧：$v(t) = V_m \sin(\omega t)$、電流：$i(t) = I_m \sin(\omega t - \theta)$（位相差 θ の遅れ電流）とすると、図 7.13 から、i(t) と電圧と同相分の i'(t) 電流の比で表されます。

$$\cos\theta = \frac{v(t)\text{と同相分の } i'(t)}{i(t)}$$

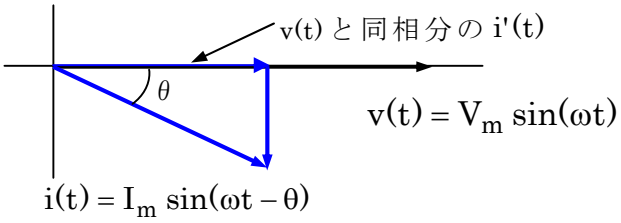


図 7.13

同様に、図 7.14 において、皮相電力と有効電力の比で表されます。

$$\cos\theta = \frac{\text{有効電力}}{\text{皮相電力}}$$

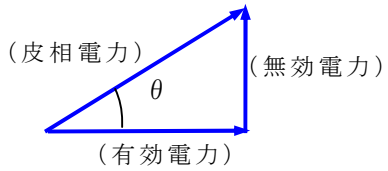


図 7.14

(1) 力率の意味について

力率は交流電力特有の用語で、直流電力には存在しません。英語では Power Factor と言います。「力率」はこの直訳です。

力率＝0.98 はその交流電力回路に流れている電流の 98%が電源から負荷へ電力(パワー)を供給するために使われていると考えてください。この電流のことを有効電流、供給されている電力のことを有効電力と呼びます。

(2) 力率改善について

力率は、一般的に「遅れ力率」で、以下の理由で力率を 1.0 に近づける対策をします。

① 設備の有効利用を図る。

(a) 受配電設備（変圧器、発電機など）の容量が設備容量目一杯に使えます。

(b) 受配電設備から付加設備までのケーブルの太さが最小のものですみます。

(c) 仮に、100kW の負荷があった場合、力率 1.0 の場合、100kVA の変圧器ですみますが、力率が 0.5 だと 200kVA が必要です。

（変圧器､発電機などの定格力率は 0.8 とか 0.85 くらいです｡また、電気を送るケーブルは力率 0.5 の場合、力率 1.0 の場合の２倍の電流が流れるため、電圧降下を考慮すると単純に倍の太さのケーブルが必要です｡）

② 電気料金の優遇

電力会社では基本料金に力率条項を加味し、力率 85 %を基準として料金が割引､又は割増される仕組みになっています｡力率改善を図れば、最高 15% の割引適用を受けることができます。これは、力率の高いほど送電線に流れる電流が少なくなり変圧器の有効利用が図れる、送電損失が減少するなどのメリットを考慮した優遇措置です。

なお、力率は１に近いほど良いのですが、進み力率の場合、負荷端の電圧上昇の他に発電機に悪影響を与える心配があることが問題とされています。

８．交流の電力量

電力量は、電気回路において、ある経過時間に電流がする仕事の量のことで、電力と時間の積を積算した総量として求められ、単位は〔W･s〕ですが、実用単位として〔Wh〕やキロワット時〔kWh〕が用いられています。

例えば、直流で電流 I が時間 t にした仕事（電力量）を W とすると、電圧を V 、電力を P とすれば、

$W = P \cdot t = V \cdot I \cdot t$〔W･s〕

となります。交流回路では負荷の構成によって電圧と電流に位相差 θ が生じるので、力率 $\cos\theta$ を加味し、

$W = P \cdot t = V \cdot I \cdot t \cdot \cos\theta$ 〔W･s〕

となります。交流において電力量といった場合には、この有効電力量を指します

なお、無効電力量 Q･t 〔Var･s〕 は以下の式で求められます。

$W = Q \cdot t = V \cdot I \cdot t \cdot \sin\theta$ 〔Var･s〕

電力量を測定するには、積算電力量計が使用されます。

９．電力と電力量について（補足）

(1)電力は、電流が単位時間にする仕事の量で、一般に１秒間に行う仕事を仕事率といいます。電気工学では、電力〔W〕＝電圧〔V〕×電流〔A〕で表され、時間の次元がないように理解されがちですが、電流は、導体内のある断面をΔｔ〔s〕の時間の間にΔｑ〔C〕の電荷が通過するとき、Ｉ〔A〕＝Δｑ/Δｔ と定義され、電流〔A〕＝電荷〔C〕÷時間〔s〕というように時間の次元が入っています。

(2)電力量は、電力に時間を掛けることで時間の項が消え、電力量＝電圧×電荷というポテンシャルエネルギーの次元になるため、ジュール〔J〕でも表すこともできます。

ジュールは、SI 表示におけるエネルギー、仕事、熱量、電力量の単位で、単位は〔J：ジュール〕で量記号はジュールで表します。

１ジュールは以下のように定義されます

１ジュール＝1〔C〕・1〔V〕＝1 クーロン・ボルト

１ジュール＝1〔W〕・1〔s〕＝1 ワット・秒

(3)電力量のキロワット時〔kWh〕という単位は、仕事率、電力の単位であるキロワット〔kW〕と、時間の単位である時〔h〕から組み立てられた単位で、1〔kWh〕とは、1〔kW〕の仕事率で１時間続けたときの仕事、あるいは１〔kW〕の電力を１時間消費もしくは発電したときの電力量ということになります。

(4)電力のワットは、エネルギーのジュールを秒で割ったものなので、これに時間をかければ、再びエネルギーの単位となります。1 時間は 3,600 秒なので、1〔kWh〕は、3,600 秒×1〔kJ＝1,000J〕＝3.6×10^6〔W･s〕、すなわち、3.6〔MJ＝MW・s〕となります。

付録　基礎数学

先輩からの一言！

物理現象の説明には必ず難しい数式が使われますが、電気も同じように数学を多く使う技術分野です。特に目に見えない電気を扱う私たちは、計器の指示や計算によって善し悪しを判断する方法しかないため、数学は切り離せない道具になっています。しかし、この数学は、約束ごとを単に覚えるだけでなく、記憶したものを、さらに頭の中で展開し、考えるといった一手間多い手続きが必要になるため、どちらかといえば敬遠されがちな分野でもありますが、知識不足から安全が損なわれるようなことがあっては断じてなりません。このような数学を身に付けていただくために付録を作りました。

内容は、独学で計算力を身につけようとする方に、数や計算のしくみから座標上で考える数学、スイッチの動作などに必要な論理といった電気ならではの数学に的を絞り、丁寧な解説をしたつもりですから、時間は要しても自分のものにしていただけることを願っています。また、内容には多少難しい箇所もでてくることかと思いますが、「継続は力なり！」と申します。あきらめないで学習して下さい。

電気の計算には、ここに取りあげたものの他にグラフ、級数や双曲線関数、テンソルやラプラス変換など、基礎の分野でもまだまだ沢山の計算方法を身につけて戴く必要がありますが、ここでは、本文の各章内容を支える内容として編集していますので、さらに上級の資格を目指そうとするときや、故障解析など複雑な計算を行う場合には技術講習書等と併用してご活用いただけるよう希望します。

付　録　　もくじ

ページ

第１章　数について ……1
１．電気に使う数 ……1
(1) 自然数 ……1
(2) 有理数 ……1
(3) 実数（無理数） ……1
(4) 複素数 ……1
２．計算 ……2
(1) 計算のしくみ ……2
(2) 数直線で考える数学 ……2
３．計算式 ……4
４．分数 ……4
(1) 分数式 ……4
(2) 分数の計算 ……5
(3) 分数の通分 ……5
(4) 約分とは ……5
(5) 繁分数の計算方法 ……5
５．パーセントの計算 ……5
６．比の関係を使った計算 ……6
(1) 分かっている数を使って分からない数を求める ……6
(2) 電気回路で考える比例式 ……6
(3) 比例と反比例の関係 ……9
(4) 静電容量の計算 ……10
７．無理数 ……11
(1) 無理数とはどんな数なの ……11
(2) ルートの付いた数の計算方法 ……12
(3) 整数の平方と平方根 ……12
(4) 平方根を求める計算 ……12
８．文字や文字式を使った計算 ……13
(1) 計算式の整理方法を覚えよう ……13
(2) 数や量など記号を使って比較する方法 ……14
(3) 数式を展開する ……14
(4) 数式の整理 ……15
９．指数 ……15
(1) 指数って何だろう ……15

ページ

(2) 大きい数や同じ数を多く用いた計算の簡単化法が指数式 ……15
(3) 指数式にはこのような意味があります ……16
10. 対数 ……16
(1) 対数とはどんな数 ……16
(2) 自然対数 ……17
(3) 対数の性質を覚えよう ……18
(4) 指数と対数の関係をグラフで見る ……19
(5) 常用対数とはなに ……19
(6) 電力の比を対数で表す ……20
(7) 電圧や電流の利得（ゲイン:増幅率）を対数で表す ……20

第２章　方程式 ……22
１．一次方程式とは ……22
２．連立一次方程式 ……22
３．二次方程式とは ……25
４．電気回路網の計算に使う方程式 ……26
(1) キルヒホッフの第１法則 ……26
(2) キルヒホッフの第２法則 ……26

第３章　座標の数学 ……29
１．複素数 ……29
(1) 複素座標（複素平面） ……29
(2) 複素数の特徴の整理 ……30
(3) 複素数をもう少し詳しく調べる ……30
(4) 複素数の計算と極座標表示の関係 ……31
(5) 複素数の性質と計算上の約束 ……31
２．ベクトル ……32
(1) ベクトル表示 ……32
(2) ベクトルと三角関数の関係の表示法 ……33
(3) ベクトルと複素数の計算 ……34
(4) ベクトルを使ったインピーダンスの表示法 ……36
３．関数 ……38
(1) 比例と反比例 ……38
(2) 関数とは ……38
(3) 一次関数とは ……39

ページ

(4) 二次関数とは……39
(5) 三角関数……39
(6) 三角関数の前にまずピタゴラスから……39
(7) x を θ に置き直し、$\sin\theta$ 、$\cos\theta$ 、$\tan\theta$ ……40
(8) $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の違い ……41
(9) 三角関数の相互の関係……41
(10) 弧度法 ……41
(11) 三角関数の応用 ……42
(12) その他の公式を調べる ……44
(13) 一般角の三角関数 ……47
(14) 正弦波起電力の周期関数 ……48
(15) 一般角のベクトルと交流波形 ……50
４．記号式を学ぶ ……50

第４章　変化率を学ぶ ……53
１．あらためて関数とはなに ……53
２．平均の変化率と瞬間の変化率 ……53
(1) 図を使って平均の変化率を調べる ……54
(2) $\Delta\Phi/\Delta t$ の意味を整理する ……54
(3) 瞬間の変化率を調べる ……55
(4) $\sin\theta$ の変化率 ……56
(5) インダクタンスＬ〔H〕に流れる電流が微少変化したとき ……57
(6) 平均の変化率の計算 ……58
(7) 微分係数を求める計算 ……58
(8) 瞬間の変化率（接線の傾き）を求める計算 ……58

第５章　交流の表示 ……59
１．実効値 ……59
２．平均値 ……60
(1) 平均値の計算 ……61
(2) 計算 ……61
(3) 計算経過と解 ……62

第６章　微分と積分 ……63
１．微分 ……63

ページ

(1) 微分の計算をやってみよう ……63
(2) 微分の計算上の約束 ……64
(3) 関数の関数の微分 ……64
(4) 三角関数の微分をやってみよう ……65
(5) 指数関数及び対数関数の微分 ……66
２．積分 ……68
(1) 不定積分 ……68
(2) 定積分 ……71

第７章　電気回路の過渡現象 ……73
１．過渡現象とは ……73
(1) 過渡現象 ……73
(2) 過渡現象は、スイッチの「入」「切」や短絡事故時に現れる ……74
２．直流の単複エネルギ直列回路の特徴 ……75
(1) RL 回路 ……76
(2) RC 回路 ……76
(3) 直流複エネルギ回路の特徴 ……76
３．直流単複エネルギ並列回路の特徴 ……76
４．微分方程式の計算 ……77
(1) 一階定数係数微分方程式とは ……77
５．過渡現象の解析 ……80
(1) RL 直流直列回路 ……80
(2) RC 直流直列回路 ……82

第８章　ブール代数 ……86
１．基本論理 ……86
(1) 論理否定 ……86
(2) 論理和 ……86
(3) 論理積 ……86
２．ブール代数と論理の計算 ……87
(1) 公理と法則 ……87
３．身近な論理の世界 ……91
(1) 電気の図面はどのように書かれているか ……91
(2) さて、次は、接点の追いかけ方です ……92

第１章　数について

１．電気に使う数

物の動きや状態を数式や座標で表しますが、特に電気では記号を使って、物のあるなしから、出入り、増加や減少、電圧や電流の方向を説明することが多く、そのほとんどが物理的な現象の説明に使われています。そのために、記号の意味を理解した上で学習というプロセスを経なければならないのです。まず初めは、電気で使う数を学習していきましょう。

（数の発展）

数は長い歴史を経て偉大な人々の手で発見されてきました。

電気に使う数の発展経過は次のようになっています。

自然数 →	整数 →	有理数 →	実数（無理数）→	複素数
（素数）	（0、－）	（$\frac{b}{a}$）	（$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}\cdots$、π）	（$i^2=-1$）

(1) 自然数

物の個数や順番を表すときの一群の数を自然数といいます。

歴史的な経過を見ますと、最初に数の概念が考えられ自然数が生まれました。

(2) 有理数

有理数という数は、二つの整数aとb（ $b \neq 0$でないとき）が$\frac{b}{a}$ という分数で表せる数のことで、比の形で表される数をいいます。

(3) 実数（無理数）

実数は、順番にお皿を並べるときのように、連続的に並べたときに直線となる数です。

この数には小数も含み、ほとんどの数が実数になるのです。

実数の考案過程で無理数という数も発見されており、無理数は有理数でない数（比で表せない数）とされています。

即ち、分子・分母ともに整数の分数形で表わせない数のことなのです。

(4) 複素数

数学書によると、実数a,bに虚数単位i（$i:imaginary\ number$）を付加した（$a+ib$）を複素数としています。この数は、aとibの一対の数で表される数で座標上の１点を表します。複素数を座標に表すときには、横軸に実数、縦軸に虚数単位を付加して座標上の１点を表します。純粋数学では、虚数単位はiを使いますが、電気では電流がi〔A〕を使うため、これと混同しないようにjの記号を使うようにしています。

虚数単位jは、２乗して－１（$j^2=-1$）になる数で$j=\sqrt{-1}$です。

このように複素数は座標上で、$z=(a+jb)$ の１点を表す数ですが、点の集合は座標上で幾何学的概念を与えるとして、古くからガウスの平面とも呼ばれ、電気では発電機で発生した起電力と電流の関係や、負荷の力率を図上で計算するときに重宝に活用されているのです。

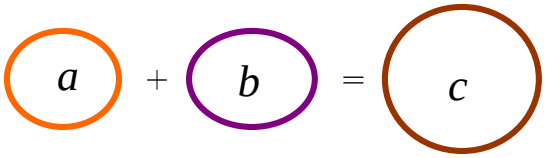
２．計算

与えられた数の条件の下で答えを導く作業が計算ですが、もう少しかみ砕いていうと数を使って分からないもの（値）を導くことが計算なのです。中学校で学習した数式や数の＋や－は、電気では電流や力の方向を説明する際の説明手段なのです。＋や－の記号は方向や状態を示す記号なのです。したがって、－や＋といったものは存在することはありません。数学では記号や符号は、計算式に付属して量の比較や物の状態を示す操作記号となっているのです。

(1) 計算のしくみ

① たし算

$a+b=c$

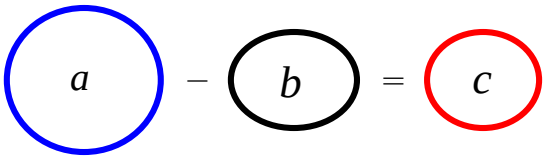


和（集まった集合数を求める計算）

図１

② ひき算

$a-b=c$

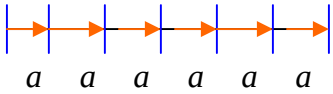


差（余りを求める計算）

図２

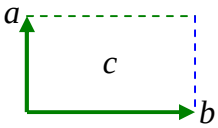
③ かけ算

$a\times b=c$



a の b 倍（$b=6$）積（倍数を求める計算）

図３－１

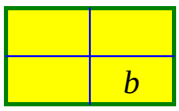


辺 a と辺 b で囲まれる面積　（面積を求める計算）

図３－２

④ わり算

$a\div b=c$



a の中の b 分割数　　商（分割数を求める計算）

$a\times\dfrac{1}{b}=c$

図４

(2) 数直線で考える数学

普段、私たちが行っている（１）の計算は四則計算（＋：たし算、－：ひき算、×：

け算、÷：わり算)」といいますが、この計算は、数のもつ方向や大きさが異なる数を直線上に配置して、大小比較をすることになるのです。

そういう意味から見るとこれらの計算は数直線上の数学と考えて差し支えないのです。

数直線の考えは古くからありデカルトの表示法と呼ばれるものです。

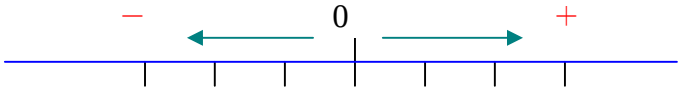


図５　数直線

①　（＋5）＋（－3）を考えてみよう

数を（　）で囲ったのは、その数が数直線のどこに位置しているか、個々の位置を示すために付属させた記号と思って下さい。

ここで＋5 は数直線では＋1×（＋5）となります。この記述に注目すると、数の先頭には必ず倍数が付属し、そして必ず進むべき方向を与える符号が付属しています。

同じように＋（－3）は＋1×（－3）と書けます。

したがって、5＋（－3）の計算は＋の 5 と－の 3 の合成値を求めることになるのです。そしてこの計算は、数直線の 0 を基点として、＋5 は右側に 5 進み、逆方向（－方向）に 3 進む、線上の到着点＋2 を求める計算になるのです。

＋（－3）は＋1×（－3）です。ここで＋（－3）には＋1×が省略されていることに注意して下さい。

②　（＋5）－（－3）を考えてみましょう

この式は、＋1×（＋5）－1×（－3）になります。数直線の 0 を基点とし、＋5 に－3 に進む数を－1 倍する計算式です。

ここで－(－３)というのは－に行き､その反対に行くことですから＋3 になるのです。したがって、この計算は数直線上の 5 から 3 ほど＋の方向に進めた＋8 が答えになります。

（　）の前の符号は、－側に進まない数又は反対側に進む数と読む操作をする記号です。これで数直線上での＋や－の符号がどちらに進むか、進行方向を示す単なる操作記号になっていることがお分かりいただけたものと思います。

（　）の前の符号が＋なら、そのまま（　）を外して計算し、（　）の前の符号が－なら（　）内の符号を変えて（　）を外して計算します。

③　（＋5）×（－3）を考えてみましょう

＋1×（＋5）を＋1×（－3）倍しなさい、という意味になりますから、－方向に＋5 を 3 倍する計算です。この計算では､＋5 が－15 の位置に移動したものになります。

④　（＋５）÷（＋3）を考えてみましょう

（＋５）÷（＋3）は、＋1×（＋5）÷＋1×（＋3）のことですから、（＋5）×〔＋

$1\times\left(\frac{1}{3}\right)$〕と表します。

⑤ 計算の式に出てくる（　）の意味

数や記号を（　）で囲うことは「四則計算の約束を無視して先に計算をしなさいという意味です。大切なことは（　）で囲った式や数には、×や＋１の記号が省略されていることを忘れないで下さい。

【まとめ】

・数直線上では四則演算はかけ算とたし算だけになります。

・数直線の計算は符号による数の合成計算です。

３．計算式

計算式は〇＝〇の形で表されます。この記述は左辺の〇と右辺の〇は互に等しいことを表すものです。このとき、左辺の式と右辺の式をつなぐ＝の記号を等号（*equal*）といい、数式の両辺が相等しいと宣言する記号で等式（*equality*）といいます。

【注意】

私たちは１＋１＝２を１＋１は２と読んでしまうことがありますが、正しく式を理解する意味からも、ここは「左辺の１＋１と右辺の２は相等しい」と読むようにして下さい。

なぜなら、計算式は等式なのですから･･･。

４．分数

分割された量や数を基準の数で比較するときの式が分数です。表す式を分数式といいます。分数式は、全体を分割し比較しようとする分割数を比較式で表したもので、横線の下に割る数（除数）、横線の上に割られる数（被除数）とおき、$\frac{b}{a}$のように書いたものになり、bを分子、aを分母と呼んで、分子が分母より小さな分数を真分数といいます。次に、分子が分母より大きく全体の分割数を超えている場合の分数は仮の分数、仮分数といいます。この計算は、全体分割数分だけ分子から取り除き１つの数に分離して残りを分割数の分数として表します。このような分数を帯分数といいます。電気の計算では、並列回路の合成抵抗を求めるときに分数の分母や分子の中に分数を含んだ複雑な形の分数として出てきますが、このような分数を繁分数といいます。

ここで分数式を整理すると次のようになります。

(1) 分数式

① 真分数：$\frac{3}{5}$（但し、$\frac{b}{a}$（$b<a$のとき）

② 仮分数：$\frac{5}{3}$（但し、$\frac{b}{a}$（$b>a$のとき）

③ 帯分数：$1\frac{3}{5}$ （$\frac{8}{5}=\left(\frac{5}{5}+\frac{3}{5}\right)$）

④ 繁分数：$\dfrac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{2}{5}}}$

⑵ 分数の計算

分数の計算は、分割数で分割された数をわる計算ですから、分子がわり切れなくなるまで、ただひたすらにわり算をする計算なのです。

【計算方法】

① 真分数の計算

$\frac{3}{5}$は、$3\div5$のようにわり切れなくなるまでわり算をする。

② 仮分数の計算

$\frac{7}{3}$は、$7\div3$が、わり切れなくなるまでわり算をする計算です。また$\frac{7}{3}$は、$2\frac{1}{3}$として$1\div3$がわり切れなくなるまでわり算をして最後に２を加えても結果は同じです。

⑶ 分数の通分

分割数（分母）が異なっているときの分数のたし算やひき算は、そのままでは計算できません。分割数（分母）をそろえて、たし算やひき算をしないと計算は意味をなさないからです。このように分割数が異なった分数を計算するとき、分母を同じ数（値）にそろえる作業を通分するというのです。

【通分の例】

$$\left(\frac{2}{3}\pm\frac{1}{5}\right)=\frac{2\times5}{3\times5}\pm\frac{3\times1}{3\times5}=\frac{10\pm3}{15}、\frac{10+3}{15}=\frac{13}{15}と\frac{10-3}{15}=\frac{7}{15}$$

⑷ 約分とは

分数式の分割数（分母）を最小にする作業を約分といいます。

約分は、分数の比を変えないで最小の分数を作るため、分子で分母を割って最小の分数式にする次のような作業を約分するといいます。

$$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\quad\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

⑸ 繁分数の計算方法

繁分数の計算は、分母、分子とも下位の分数から上位の分数計算を次々に行ってわり切れなくなるまでわり算をする計算です。

５．パーセントの計算

100 を基準とした次のような数の表し方を百分率といいます。

$$\frac{2}{50}\times 100 = 0.04\times 100 = 4 \text{〔\%〕}$$

この計算は、全体数を 50（50 を 100%）個としたとき、そのうち 2 個が占める割合を 50 を基準としていくつあるかという式に 100 をかけたものです。パーセントを使った数の表示は、発電機や電動機の効率やすべりを求めるときに使いますので、何を基準にした%表示なのかをよく計算の過程を考えながら計算をしましょう。

6．比の関係を使った計算

基準の数に対して比べられる数がどのような値になるかを表すときの比較式を比例式といいます。比例の関係は、$\frac{a}{b}$ とする分数式や $a : b$ のように表します。

(1) 分かっている数を使って分からない数を求める

ある条件の下に、比べる条件か数のどちらかが分かっているときは、比例式を使って、分かっていない数を表すことができます。

【例題】

いま、10〔g〕が 200 円の電線を 10〔kg〕購入するときの価格を比例式で求めてみましょう。この比例式は、$200 : 10 = x : 10\times 10^3$ になり、このとき x が分からない数（未知数）とすると、比例式で表すと「$200\times 10\times 10^3 = x\times 10$」になります。

【計算して確かめる】

式の両辺に（$\frac{1}{10}$）をかけて、右辺を x だけの項にすると、次の分数式ができます。

x だけの式にして、計算すると未知数 x が求まります。

$$x = \frac{200\times(10\times 10^3)}{10} \qquad x = 20\times(10\times 10^3) = 20 \text{ 万円}$$

このように比例式を使うと分からない数を求めることができます。

(2) 電気回路で考える比例式

電気回路に分流して流れる電流の大きさを求めるときにも比例式は使えます。

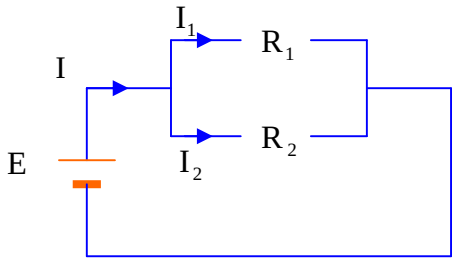


図 6

回路に流れる全体の電流Iが、I_1とI_2に分岐して流れるような図6の電気回路を考えます。

一つの流れが複数に分かれて流れて再び合流するような電気回路を総称し並列の電気回路といいます。分岐して流れる電流の大きさは、中学校では、抵抗の大きさに比例して流れることを学びましたが、大切なことは並列回路の抵抗に流れる電流は、抵抗の大きさによって分れて並列箇所が終わると、また元の大きさの電流I〔A〕の流れになるということです。

どこかでなくなったりしないという約束の下に計算されるのです。

【例題】

それでは、それぞれの抵抗に流れる電流を抵抗の比を使って求めてみましょう。

回路に流入する全体の電流は、分岐した電流を全てたしたものです。

$$I = I_1 + I_2 = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} = E \times \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) 〔A〕$$

R_1とR_2の二つの抵抗の両端には、同じ値の電圧が加わりますから、I_1とI_2は、オームの法則から抵抗の大きさに応じた電流となります。この式の意味は、元の電流は分流した電流を加えたものに同じ（等しい）で、分流電流は、各抵抗で電圧をわった値であることを示す電流式になるのです。

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad 〔\Omega^{-1}〕$$

合成抵抗R_0は、抵抗の逆数の和の逆数の繁分数になり、式は次のようになります。

$$R_0 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} \quad 〔\Omega〕$$

電圧は、$E = I \times R_0 = I \times \left(\frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} \right)$〔V〕であって、並列回路の両端の電圧は一定、分流回路に流れる電流はそれぞれの抵抗に応じて流れるため、それぞれに流れる電流は、$I_1 = \frac{E}{R_1}$〔A〕　$I_2 = \frac{E}{R_2}$〔A〕になります。

いま、並列抵抗の比を使って全体の電流からそれぞれの電流を求めてみます。

$I_1 = \frac{E}{R_1}$〔A〕及び$I_2 = \frac{E}{R_2}$〔A〕に、$E = I \times R_0 = I \times \left(\frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} \right)$〔V〕を代入すると、それぞれの電流は、次に示すように元の電流の抵抗比倍で表すことができます。

分流電流　$I_1 = \dfrac{E}{R_1} = \dfrac{1}{R_1} \times I \times \left(\dfrac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} \right) = I \times \left(\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$ 〔A〕

分流電流　$I_2 = \dfrac{E}{R_2} = \dfrac{1}{R_2} \times I \times \left(\dfrac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} \right) = I \times \left(\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$ 〔A〕

次は、図 7 のように R_1 と R_2 の二つの抵抗が直列接続されているとき、各抵抗で降下する電圧、V_1 と V_2 を比例式で求めてみます。

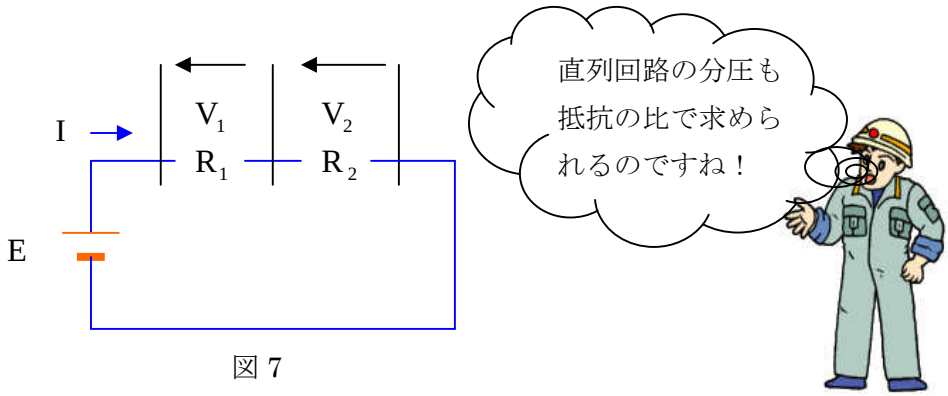
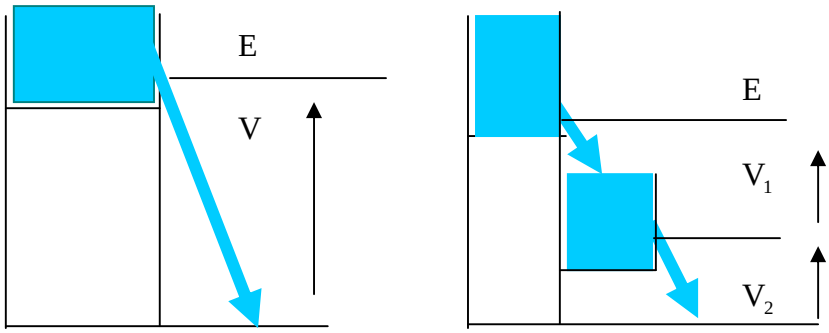


図 7

直列回路の両端の電圧（加えた電圧）は、抵抗で降下する電圧をたし算したものですから、$E = V_1 + V_2$〔V〕です。

合成抵抗は、それぞれの抵抗をたしたものですから、$R_0 = R_1 + R_2$〔Ω〕になります。直列回路に流れる電流の大きさは一定ですが、電圧は抵抗を通るたびに降下します。

図 8 は並列と直列回路の電圧と電流の関係を水の流れに例えて表したものです。



（並列回路）
並列の抵抗の両端の電圧

（直列回路）
直列の抵抗で降下する電圧

図 8

直列回路のオームの法則は、$E = I \times (R_1 + R_2)$〔V〕です。

抵抗に流れる電流Ｉはどこも同じで一定なので、それぞれの抵抗で降下する電圧の総和は元の電圧であるため、$E = V_1 + V_2$ に $I = \dfrac{E}{R_0}$〔A〕を代入します。

$$E = V_1 + V_2 = R_1 \times I + R_2 \times I$$

$$E = R_1 \times \frac{E}{R_0} + R_2 \times \frac{E}{R_0} = E \times \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) + E \times \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

よって、$V_1 = E \times \left(\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$　$V_2 = E \times \left(\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$　になります。

このようにすると、元の電圧Ｖに抵抗の比を与えることによって、それぞれの電圧求めることができます。この関係は実際の職場でもよく使いますので覚えておきましょう。

分流　$I_1 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \times I$、$I_2 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} \times I$

分圧　$V_1 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} \times E$、$V_2 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \times E$

(3) 比例と反比例の関係

基準の数が増加や減少するとき、比較する数も同じように増減するときに比例関係にあるといいます。

逆に、基準の数の増減と反対に減増するような関係を反比例の関係といいます。

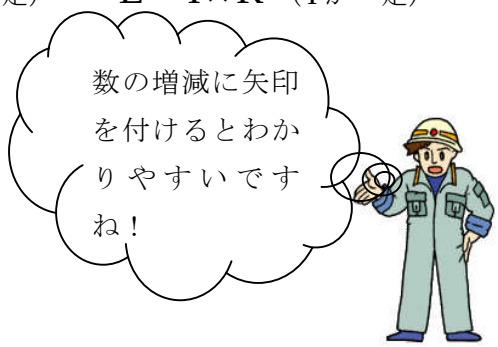
オームの法則の $I = \dfrac{E}{R}$、$E = I \times R$ のＩとＥとの間に比例関係、Ｒとは互いに反比例の関係にあるといいます。

この関係をわかりやすくするために両辺に矢印を付けて比例や反比例にある関係を数の増減で表してみました。矢印の上向きは増加、下向きは減少を示しています。

○比例関係　$\overset{\uparrow}{E} = \overset{\uparrow}{I} \times R$（Ｒが一定）　$\overset{\uparrow}{E} = I \times \overset{\uparrow}{R}$（Ｉが一定）

電流は電圧に比例して流れます.

○反比例関係　$\overset{\uparrow}{I} = \dfrac{V}{\underset{\downarrow}{R}}$（Ｖが一定）



【例題】

導体の抵抗率 ρ 〔Ωm〕、導体の長さ L〔m〕、導体断面の大きさ A〔m^2〕とするときの導体抵抗が $R=\rho\times\frac{L}{A}$〔Ω〕であるとき、単位長さの導体を長さ方向に 3 倍し、断面の大きさを $\frac{1}{3}$ にしたら、導体抵抗は元の何倍になるか計算してみましょう。

【計算】

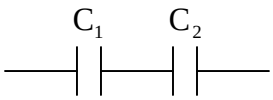
$$R=\rho\times\frac{L}{A}=\rho\times\left(\frac{3\times L}{L}\right)\times\frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{3}\times A}{A}\right)}=\rho\times3\times\frac{1}{\frac{1}{3}}=\rho\times3\times\frac{3}{1}=9\times\rho$$

この計算によって、元の抵抗の 9 倍になることが分かりました。

(4) 静電容量の計算

次の回路の合成静電容量を求めてみます。

【直列接続の計算】



$C_1=2$〔μF〕 $C_2=8$〔μF〕

初めて静電容量ということばが出てきましたが、コンデンサのことです。

コンデンサは電荷を蓄える部品です。

電気回路に出てくる C がそれです。

R - L - C は、抵抗、インダクタンス、コンデンサを表しますが、コンデンサは、C という記号を使います。

この 3 つの部品は、電気回路の 3 要素といって、電気回路では代表的な機能部品です。電界と静電容量との間には次の関係があります。

$$V=\frac{Q}{C}\ 〔V〕$$

二つの静電容量 C_1 と C_2 の合成は、$V=\frac{1}{C}\cdot Q$ ですから、抵抗の並列回路の合成抵抗を求めるときのように、静電容量は逆数のたし算になります。

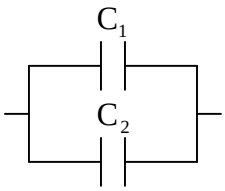
$$\frac{1}{C_0}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots\cdot+\frac{1}{C_n}$$

したがって、C_0 は、次式のように計算できます。

$$C_0 = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2 \times 8}{2 + 8} = \frac{16}{10} = 1.6〔\mu F〕$$

大切なことは、$V = \frac{1}{C} \cdot Q$ に見るように逆数の計算ということです　。

【並列接続の計算】



$C_1 = 2〔\mu F〕\ C_2 = 8〔\mu F〕$

蓄積する電荷と静電容量は、次の関係があります。並列のコンデンサは蓄電池と同じように充電容量を考えます。

コンデンサに電気を充電する場合は、並列個数が増えれば増えるだけ容量を増しますので、蓄積される電荷も増加するのです。

したがって、並列回路での合成静電容量は次式のように並列数倍となるのです。

$Q_1 = C_1 \cdot V$〔C〕、$Q_2 = C_2 \cdot V$〔C〕、$Q_3 = C_3 \cdot V$〔C〕

$Q_0 = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n$

$Q_0 = 2 + 8〔\mu F〕= 10〔\mu F〕$

【記号の語源】

抵抗 R：*resistance*

電荷 Q：*quntity of electricity*

電流 I：*intesity of electricity*

長さ L：*length*

断面の大きさ A：*area*

７．無理数

(1) 無理数とはどんな数なの

何か無理なことをする数ではないの。と疑う方もおられるかもしれませんが、実はそうでなくて、比（分数式）で表せない数をいうのです。

このような数には、$\sqrt{2}$ とか $\sqrt{3}$ のようにルートから完全に取り出せない数を代表していうのです。電気の計算では、無理数とは大変ご縁のある数なのです。

次に、先輩達が考えた覚え方を掲載しました。

① $\sqrt{2}$ ：一夜一夜に人見ごろ＝1.41421356

② $\sqrt{3}$ ：人並みに、おごれや＝1.7320508

③ $\sqrt{5}$ ：富士山麓（に）オーム鳴く＝2.2360679

④ $\sqrt{6}$ ：似よ、よくよく＝2.44949

⑤ $\sqrt{7}$ ：菜に虫いない＝2.64575

⑥ $\sqrt{8}$ ：にやにや＝2.828

⑦ $\sqrt{10}$ ：人丸に、三色（さんいろ）に並ぶ＝3.1622

(2) ルートの付いた数の計算

ルートの中の数の計算は次の順番で行います。

① 開き切ることのできる因数は√の外に出す。

② 分母に√のついた数があるときは有理化（平方根を含む分数式の分母または分子から根号を取り除く式の操作）をする。

③ 共通の√の項をまとめる。

【代表的な計算のやり方】

① $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ の場合、$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{2.4495}{3}=0.816$

② $\dfrac{b}{\sqrt{a}}=\dfrac{b}{\sqrt{a}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\dfrac{b\sqrt{a}}{a}$

③ $\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$

【ルートの計算をするときの大切な約束】

① $a>0$、$b>0$ なら、$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ 、$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

② √の中の値が負（－）の値をとるときは複素数で計算して下さい。

(3) 整数の平方と平方根

$4=2^2$　$9=3^2$　$16=4^2$　$25=5^2$・・・　$64=8^2$　$81=9^2$　$100=10^2$ のように 2 乗して表した数を平方といい、2 乗した数をルートの中に入れて、ルートから取り出したものが平方根です。

例えば、4^2 は $\sqrt{16}$ ですが、ルートから取り出した $\sqrt{16}=4$ は平方根なのです。

(4) 平方根を求める計算

電気では、大きさと方向の異なった値のたし算やひき算をよく使います。

この場合、必ずルートの計算が必要になって開放するには電卓を使って、√のキイをポンと押すと、すぐに答えは求まりますが、ここでは平方根の意味を理解して頂くために手計算で求める方法を学習しましょう。

【手計算で $\sqrt{2}$ の平方根を求めてみよう】

① 2 乗して 2 に近い整数は 1 だから 2 の上に 1 を書き、左に 1 を縦に並べます。

② 左に書いた 1 と上においた 1 と掛け算しその結果の 1 を 2 の下に 1 を書きます。

③ 左に書いた 1 と 2 を割った 1 を加えた数の 2 を下に下ろします。

④ 右の計算は、2 から 1 を引くと 1 だから、1 を下に下ろし下二桁 00 を設けます。

⑤ 左は 2〇の二桁の数が、右の 100 の中にいくつが存在するか計算します。

⑥ 2〇は、100 の中に 4 回は存在するので、24 で 100 を割り、96 を得ます。

⑦ 左は、決定した 24 と割った 4 を加え、28〇と 3 桁を作る。右は 100 から 96 をひいた「差の 4」を下に下ろして下二桁に 00 を設けます。

⑧ 28〇が 400 の中にいくつ存在するか計算すると 1 であるため、左に 281 と書いてかけた 1 を下に書きます。

⑨ 右は、400 から 281 を差し引いた値 119 を下に下ろします。

⑩ 左は、281 に 1 を加えた 282 を四桁にして 282〇とします。次に 119 に 00 の二桁を下ろして 11900 とし、282〇がこの中にいくつあるか計算します。

⑪ ⑩の計算は「4」あるため、11900 を 2824 で割ると 11296 で、余りが 704 となります。

⑫ さらに、下位の桁を求める場合は割り切れるまで同様に操作しながら計算を行って求めて行きます。

				1.		4		1		4		
1				2.	0	0	0	0				
1				1								
2	④			1	0	0						
	4				9	6						
2	8	①				4	0	0				
		1				2	8	1				
2	8	2	④			1	1	9	0	0		
			4			1	1	2	9	6		
								7	0	4	（余り）	

8．文字や文字式を使った計算

(1) 計算式の整理方法を覚えよう

合理的な計算をするための式の整理方法を学習します。

① かけ算の記号は省き、わり算の記号は分数に置き換えます。

$$a \times b = ab \qquad a \div b \times c = \frac{ac}{b} \left(\neq \frac{a}{bc} \right)$$ （≠ の記号は等しくないと読みます。）

② 文字式の前には必ず係数が付いていると考えます。

③ 文字式はアルファベットの順に並べ換えます。

④　累乗は指数を使って表します。$\left(a \times a \times a = a^3\right)$（指数はあとで学びます。）
⑤　同類項（同じ変数をもった項）は指数の高い順に整理します。
⑥　分数は分母分子の間で約分して簡単化し約分は早い段階で行うのがコツです。
⑦　数式の桁数の大きな数は指数の形に書き直して簡単にします。

⑵ 数や量など記号を使って比較する方法

＜や＞の記号を＝（等号）に対して不等号といいますが、この不等号は、ものの大小の比較や数理的な論理を表すときに使う記号です。記号の左側を左辺、右側を右辺といって、＞の記号を左辺は右辺より大なり、＜の記号は右辺より小なりと読んで、式の持つ意味を論理的に表します。この不等号を伴った式の特徴は、符号を左から右に移動させると、不等号の向きが変ったりしますので注意が必要です。次に不等号の代表的な表し方を示しました。

①　$a > b$ なら $a - b > 0$、$a - b > 0$ なら、$a > b$
　a が b より大きければ、$a - b$ は 0 より大きな数
②　$a < b$ なら $a - b < 0$ であって、$a - b < 0$ ならば $a < b$
　a が b より小さければ $a - b$ は 0 より小さな数
③　$a > b$ なら $a \pm c > b \pm c$
　a が b より大きいとき、不等号の両辺に c なる任意の数をたしてもひいてもその関係は変わらない
④　$a > b$ で $m > 0$ なら $ma > mb$、$\dfrac{a}{m} > \dfrac{b}{m}$
　a が b より大きいとき、0 より大きな数 m を不等号の両辺にかけても割ってもその関係は変わらない
⑤　$a > b$ で $m < 0$ なら $ma < mb$、$\dfrac{a}{m} < \dfrac{b}{m}$
⑥　a、b が正の数で $a > b$ なら $a^n > b^n$（但し、n は正の整数）
⑦　$a > b$、$c > d$ なら $a + c > b + d$
⑧　$a\ b\ c\ d$ が正の数で $a > b$、$c > d$ なら $ac > bd$

⑶ 数式を展開する

電気の計算では数式の展開もよく使うので中学校や高等学校で勉強したことを復習します。①～⑧で使う数は定数、⑨～⑪では変数を使っています。

【数式展開の約束】

①　$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$
　（$a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = a^2 + 2(a \times b) + b^2$）
②　$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$

③　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

④　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

⑤　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

⑥　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

⑦　$(a-b)(a^2-ab+b^2)=a^3-b^3$

⑧　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

⑨　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

⑩　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

⑪　$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

(4) 数式の整理

次に数式の整理方法を復習します。

①　$ma+mb=m(a+b)$

②　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

③　$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

④　$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

⑤　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

⑥　$a^2+b^2=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

⑦　$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

９．指数

(1) 指数って何だろう

数の右肩に小さな数が付いた数（冪：べき）を指数といいます。例えば、a^m と表したとき「m」が指数なのです。指数の計算は、整数 a を底（てい）とするべき乗の四則計算ですが、対数との間に密接な関係がありますので関連付けて覚えて下さいね。

(2) 大きい数や同じ数を多く用いた計算の簡単化法が指数式

例えば、$a\times a\times a\times a=a^4$　は、a を４回かけた数を a^4 のように表すとき、指数で表した a といいます。いろいろな指数の表記方法や性質を次に示しました。

〔指数のかけ算は指数のたし算〕

①　$a^m\times a^n=a^{m+n}$　　$a^2\times a^3=(a\times a)\times(a\times a\times a)=a^{2+3}=a^5$

〔指数の割り算は指数のひき算〕

②　$a^m\div a^n=a^{m-n}$　　$a^5\div a^2=\dfrac{a\times a\times a\times a\times a}{a\times a}=a^{5-2}=a^3$

③　$a^2\div a^3=\dfrac{a\times a}{a\times a\times a}=\dfrac{1}{a}=a^{-1}$

〔指数のべき乗のかけ算は指数のかけ算〕

④　$(a^2)^3 = a^2 \times a^3 = a^{2\times3} = a^6$

〔その他の表し方〕

⑤　$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$　　$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

⑥　$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$　　$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

・2 乗して a になる数を a の 2 乗根、3 乗して a になる数を立方根といって $\sqrt{a}$ や $\sqrt[3]{a}$ で表します。

・立方根のように a の n 乗根は方程式 $x^n = a$ の根なのです。

・冪数が 2 のときのみ $\sqrt{a}$ と書きますが、2 より多い n の冪乗になるときは $\sqrt[n]{a}$ と書きます。

(3) 指数式にはこのような意味があります

指数は正の整数 a を底（てい）としたべき乗で表しました。

いま、$a^4 \div a^4 = 1$ の式の指数の冪数を m 、n と置いて、べきの数の大小関係をなしにして $\dfrac{a^m}{a^n}$ としたとき、この分数式は a^{m-n} に変形できます。

a が $a \neq 0$ のときだけ、$a^0 = 1$ になるように約束すると、$a^4 \div a^4 = a^{4-4}$ も a^0 として置くことができ、1 とすることができます。

また、$a^3 \div a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$ のように指数の大小が入れ替わったときでも成立するように $a^3 \div a^5 = \dfrac{1}{a^{5-3}} = a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$ としたときも a を $a \neq 0$ と置くと、$a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$ のように表すことができるのです。この関係を使うと、指数計算では底（てい）になる数を $a \neq 0$ （0 でない数）とすることにより計算の方法を一般化することができ $a^m \div a^n = a^{m-n}$ の指数式も冪（べき）のみの引き算で計算がきるようになります。

指数の一般化式　$a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$

指数は大変便利ですから約束や計算のやり方をはっきり覚えておきましょう。

10. 対数

(1) 対数とはどんな数

指数式において底の数のべき乗はいくつ。というのをべき乗は基準の数値を底（てい）にしたときいくつになる。というようにいい方を変えた式が対数式です。

同じ数のいい方を変えて表すのが対数なのです。

対数とは、指数と対（つい）の関係にあるので対数です

指数では $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$ 、対数では「10 を何乗したら

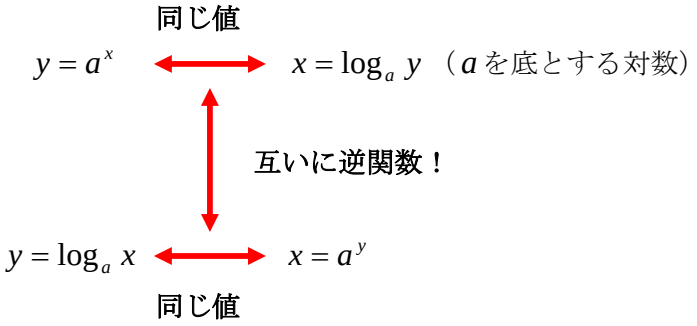
1000」になるの。と表わしますが対数では、逆に 10 を底（てい）にした $\log_{10} 1000 = 3$ という式で表します。

即ち、指数の表現を逆にしたものが対数になるのです。

指数は、桁数の大きな数の計算や電力や電圧、電流の倍数を求めるときに役立ちます。特に現場では指数と対数をよく使いますので、ここでは両式が同じもののいい回しの違いであることを理解して計算力をつけて下さいね。

指数と対数の相互の関係を式で表すと、$y = a^x$ と $x = \log_a y$ になります。この式は、$y = \log_a x$ とするとき、y は a を底（てい）とした x の対数であるという表記なのです。この x は、対数 y の真数といいます。

指数と対数の x と y の位置を入れ替えた式は、互いに元の式の逆の関係になりますが、ややこしいので次のように関係を表してみました。



【まとめ】

指数と対数の関係は互いにいい回しを変えた数なのです。

(2) 自然対数

自然対数は自然数 e を底（てい）にした対数をいいます。

e は、*leonhard euler*（オイラー：スイスの数学者）が指数や対数の変化率の研究過程で発見した数で、次のような数です。この数は無限に続く数なので前章で説明した無理数なのです。

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828182718 \cdots$$

自然数は、自然界の様々な現象変化の説明で現象に良くフィットする数として自然数と言われていますが、電気では過度的な電圧や電流の増加や低下の変化を説明する上では欠かせない大切な数なのです。自然数と自然対数の関係は次のようになります。

$$y = e^x \leftrightarrow x = \log_e y$$

(3) 対数の性質を覚えよう

普遍的な数aを対数の性質を使って、aが1でない数とするとき、対数は次のように表せるのです。（対数は、底が1でなければどんな数でも表せるのです。）

【対数の性質】

① $\log_a a = 1$

$\log_a a = x$と置いたときの指数は、$a^x = a$、但し$a \neq 1$の条件では、$x = 1$になるので対数も1という式です。

② $\log_a 1 = 0$

$\log_a 1 = x$と置くと、指数では$a^x = 1 (= a^0)$なので、$a \neq 1$から$x = 0$になるので、対数も0になるという式です。

③ $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$

$\alpha = \log_a x$、$\beta = \log_a y$と置いて、これを指数表示すると$x = a^\alpha$、$y = \alpha^\beta$になり、このかけ算$x \cdot y$は、指数では$x \cdot y = a^\alpha \times a^\beta = a^{\alpha+\beta}$となり、この式を対数式で表すと、$\log_a x \cdot y = \alpha + \beta = \log_a x + \log_a y$になるという式です。

④ $\log_a \dfrac{y}{x} = \log_a y - \log_a x$

③式と同様に$\alpha = \log_a x$、$\beta = \log_a y$と置いて、指数表示では$x = a^\alpha$、$y = \alpha^\beta$となるので、指数の割り算の約束に（「$\dfrac{y}{x} = \dfrac{a^\beta}{a^\alpha} = a^{\beta-\alpha}$」）を使い、これを対数式に置きなおすと$\log_a \dfrac{a^\beta}{a^\alpha} = \log_a y - \log_a x$になるという式です。

⑤ $\log_a x^n = n \log_a x$

$\log_a x = \alpha$と置き、指数表示$x = a^\alpha$としたものに両辺をn乗して、

$x = (a^\alpha)^n = a^{n \cdot \alpha}$としたものは、$\log_a x^n = n \cdot \alpha = n \log_a x$になるという式です。

⑥ $\log_a \sqrt[n]{x^n} = \dfrac{m}{n} \log_a x$

⑤式のnに$\dfrac{m}{n}$を置いて、xのべき$\dfrac{m}{n}$が対数の係数になるという式です。

⑦ $\log_a x = \dfrac{\log_a x}{\log_c a}$

この式は、底（てい）を新たに置きなおす場合の式で、新たな底cが$c\rangle 0$で$c \neq 1$とすると、$\log_a x = \alpha$がなりたち、$\alpha = \dfrac{\log_c x}{\log_a a}$と宣言することができれば、$x = a^{\alpha}$の両辺を$c$を底とする対数、$\log_c x = \log_c a^{\alpha} = \alpha \log_c a$に置き換えられるという式です。また、この式は底がどんな数に変わっても元の数との関係さえ保てば、対数としてなり立つというものです。

(4) 指数と対数の関係をグラフで見る

この図は指数と対数が逆の関係になることを示したものです。

指数と対数は、互いに逆関数にあるのが一見して分かります。

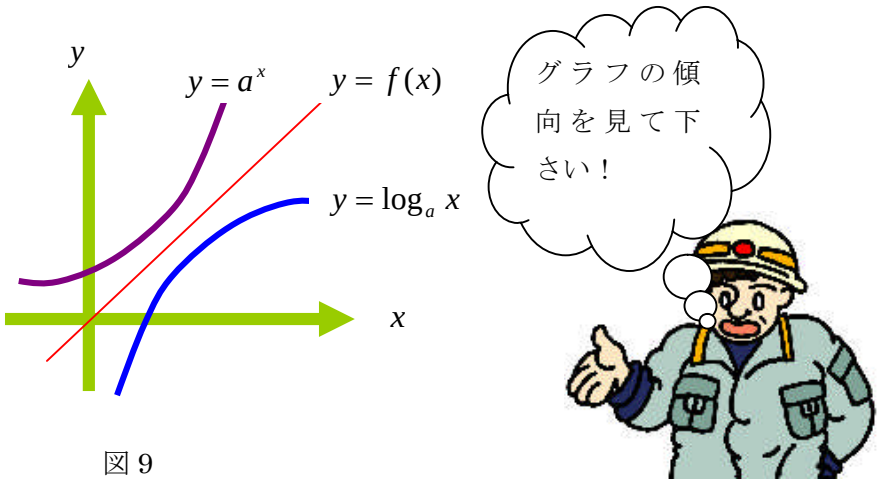


図 9

(5) 常用対数とはなに

次に 10 を底（てい）とする対数です。この対数を常用対数といって普段良く使うという意味で常用という名前が付いています。

常用対数は、$y = \log_{10} x$と表して、単位を dB（(デシベル：$\dfrac{1}{10}$〔deci〕）とします。

しかし、普段は底（10）を書かないで$y = \log x$として使っているのです。

【指数と常用対数の関係の一覧】

$10^1 = 10 \longleftrightarrow \log_{10} 10 = 1$　　$10^2 = 100 \longleftrightarrow \log_{10} 100 = 2$

$10^3 = 1000 \longleftrightarrow \log_{10} 1000 = 3$　　$10^0 = 1 \longleftrightarrow \log_{10} 1 = 0$

$10^{-2} = \dfrac{1}{100} \longleftrightarrow \log_{10} \dfrac{1}{100} = -2$　　$10^{-3} = \dfrac{1}{1000} \longleftrightarrow \log_{10} \dfrac{1}{1000} = -3$

(6) 電力の比を対数で表す

入力電力 p_1 と出力電力 p_2 の比を使って電力の増幅比を求めようとするとき、対数式で表わすと次のようになります。

$$G = 10 \cdot \log_{10} \frac{p_2}{p_1}$$ 〔dB〕（電力の増幅比）

(7) 電圧や電流の利得（ゲイン：増幅率）を対数で表す

電圧や電流の対数は、電力の比に比べ電圧が 2 乗（電流も 2 乗）に比例するため式は次のようになります。

$$G = 10\log_{10}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = 20\log_{10}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$ （電圧比）

$$G = 10\log_{10}\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 = 20\log_{10}\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$$ （電流比）

【練習問題】

電圧利得が 6〔dB〕と電力利得が 3〔dB〕のときの倍数を求めます。

【電圧利得の計算】

$G = 20\log_{10}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ から電圧利得が 6〔dB〕は、$6 = 20\log_{10}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

この式は $\frac{6}{20} = \log_{10}\frac{V_2}{V_1}$ となり、左辺は 0.3！ 従って、$\log\frac{V_2}{V_1}$ は 0.3 になります。また対数表からも log2 は **0.301** です。従って、対数が 0.3 になるのは 2 ですから、$\frac{V_2}{V_1}$ は **2** になります。以上から、電圧比 $\frac{V_2}{V_1}$ は 2 倍

【電力利得の計算】

$G = 10\log_{10}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$ から電力利得が 3〔dB〕は、$3 = 10\log_{10}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$

電圧利得と同じようにして $\frac{3}{10} = \log_{10} \frac{p_2}{p_1}$ とすると、左辺は「0.3」

対数が「0.3」になるのは「２」ですから、$\frac{p_2}{p_1}$ は 2 になります。

第２章　方程式

いよいよ方程式です。方程式とは、未知数（分かっていない数）をもつ等式のことです。また、$2x=10$ のような式で未知数 x を求めることを、方程式を解くといいます。

１．一次方程式とは

未知数 x を１つだけ持った等式を一次方程式といって $2x-5=10$ のような等式を指します。早速、例題で調べてみましょう。

【例題】

いま蓄電池の１セルの起電力が 2.0〔V〕となる鉛蓄電池から、5〔A〕を取りだすとき、端子電圧が 0.5〔V〕に低下したときの電池の内部抵抗を r〔Ω〕とします。

このとき内部抵抗による電圧降下は、$\mathrm{I}\times r$〔V〕になるので、$5\times r$〔V〕に電圧が低下したと考えると、r に関する一次の方程式ができます。

$$2.0-5\times r=0.5 \text{〔V〕}$$

方程式は、左辺＝右辺の等式でなければならないので、未知数の内部抵抗 r〔Ω〕は左辺に移し、r〔Ω〕の係数が１になるように整理すると $r=0.3$〔Ω〕が一次方程式の解（方程式から求めた数を解といいます。）であることが分かります。

２．連立一次方程式

同時に成立する方程式の組、あるいは未知数が二つ以上あるときの方程式を連立方程式といいます。未知数が複数個もつ方程式は、その個数分の方程式がなければ未知数は求められないので、方程式をいくつも並べた方程式を作る必要があります。

作った方程式の並べたものを連立方程式というのです。

複雑な電気回路に流れる電流や電圧の低下を求めるときには、煩わしい方程式を解くことになりますが、ここでは方程式を機械的に解く行列式を学習します。

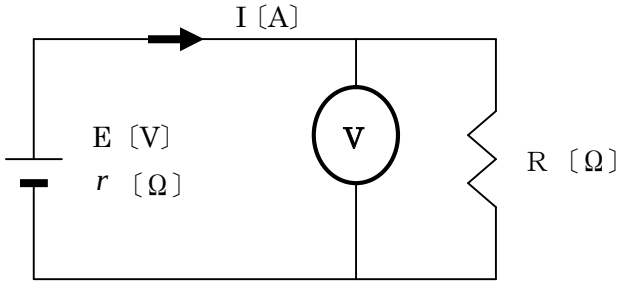


図 10

図 10 のように蓄電池の発生起電力 E〔V〕から、6〔A〕の電流を取りだすときに電圧計の指示が 0.6〔V〕を示しました。この蓄電池から 2〔A〕の電流を取りだすときの電圧が 1.0〔V〕とするときの蓄電池がもつ内部の抵抗「r〔Ω〕」求めます。

作る方程式は、E〔V〕と r〔Ω〕の 2 つですから方程式も二つ必要で、二元の連立

方程式になります。方程式の解法は、中学校で学習した加減法、代入法、等置法の中から加減法と代入法を使って求める方法と行列式によって求める方法をやってみましょう。上の設問から作った方程式は（１）と（２）です。

$$\begin{cases} \mathrm{E}-6\cdot\mathrm{r}=0.6 & （1） \\ \mathrm{E}-2\cdot\mathrm{r}=1.0 & （2） \end{cases}$$

（１）式－（２）式とすると、次のように蓄電池の内部抵抗が求まります。

$$-6\cdot\mathrm{r}+2\cdot\mathrm{r}=0.6-1.0$$

$$-4\cdot r=0.4$$

$$r=0.1\text{〔Ω〕}$$

これを（１）式に代入すると未知数であった起電力が求まります。

E－6･0×0.1＝0.6〔V〕

E＝0.6〔V〕＋0.6

＝1.2〔V〕

今度は、二元の連立一次方程式を行列式で求めてみます。

方程式が次の二元方程式とします。

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & （1） \\ a_2x+b_2y=c_2 & （2） \end{cases}$$

（１）式×b_2－（２）式×b_1から、$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1$

－（１）式×a_2＋（２）式×a_1から、$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1$

として、ここで$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$（0 ではない）としますと、xとyは次式で表せます。

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

【いよいよ行列式の登場です】

ここで、$a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ のように２行２列に並べて表します。

行列式は、「たすきがけ」の「かけ算」と「ひき算」によって未知数を求める方法です。行列式のかけ算と引き算は次の関係になります。

$$c_1b_2-c_2b_1=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad a_1c_2-a_2c_1=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

【方程式（１）（２）式を行列式で示しました。】

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{c_1\times b_2-c_2\times b_1}{a_1\times b_2-a_2\times b_1} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{a_1\times c_2-a_2\times c_1}{a_1\times b_2-a_2\times b_1}$$

次に数値を入れた等式を二次の行列式で方程式の解を求めてみます。

$2x+5y=-4$ （１）

$3x-4y=17$ （２）

$2x+5y$ と $3x-4y$ の式の係数を使って分母とします。

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

x を消去するため x の項に－4 と 17 を代入し、分子として未知数を x とした行列式を作って計算をします。

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 17 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}}=\frac{(-4)\times(-4)-17\times 5}{2\times(-4)-3\times 5}=\frac{-69}{-23}=3$$

同じように y ついても計算します。

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 17 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}}=\frac{2\times 17-3\times(-4)}{2\times(-4)-3\times 5}=\frac{46}{-23}=-2$$

次に、三元の連立方程式を行列式で根を求める方法をやってみます。

$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ （１）

$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ （２）

$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$ （３）

この方程式の解を求めるには二元方程式と同じ作業になりますが、まず未知数 x と y を求めるために、分子となる z を消去し、x や y の項に d を入れます。

次に、z を求めるときには、z の項に d を入れた行列式を作ります。

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

ここで左辺を $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ として三次の行列式と

同じように y と z について行列式を作ります。

$$y=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad z=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

このように行列式を使うと機械的に方程式の解を求めることができます。

このやり方は 3 行 3 列までしか使えませんが、余因子行列という方法を使うことによって、計算できます。ここでは割愛しています。

3．二次方程式とは

x の二次方程式は $ax^2+bx+c=0$ で表されます。但し、この式は $a\neq 0$ に限ったものです。二次方程式の二次の意味は、未知数 x の方程式の解（根ともいいます。）が二つあるということです。では二次方程式を展開して根の式を導いてみましょう。

$ax^2+bx+c=0$ の式の両辺を a で割り算して $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ とします。次に、未知数 x を等式の左辺に移項して $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$ とし、この式の両辺に $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ を加えて、

$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ とします。更に $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ と変形して整理すると、$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ となります。この等式の左辺 $\frac{b}{2a}$ を右辺に移項すると、二次方程式の根の式が求まります。

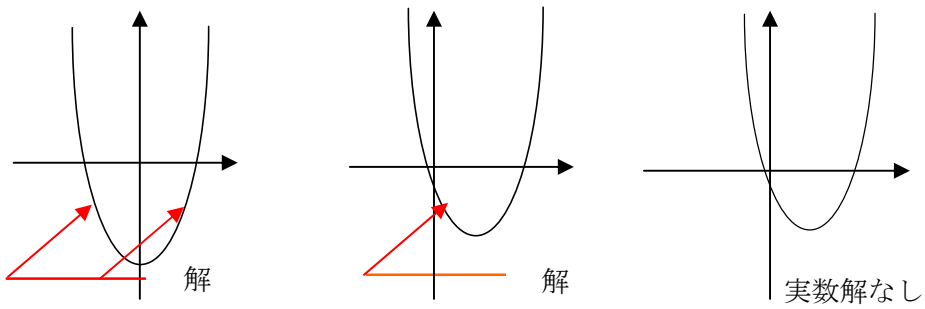
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ （二次方程式の根の式）

方程式の右辺の $\sqrt{\ }$ の b^2-4ac を D と置いて、解の性質を調べる判別式を作り、方程式の解の性質を調べてみます。性質を調べることを判別するというのです。

二次方程式の判別式

・判別式 D＞0 なら相異なった二つの実根を持つ
・判別式 D＝0 なら重根（二根が同じ等根）を持つ
・判別式 D＜0 なら相異なる二つの複素数の根を持つ

これらの判別式によって期待する根の特徴をグラフで見て見ましょう。



D＞0：二つの実数根　　D＝0：重根　　D＜0：虚数根

図 11

４．電気回路網の計算に使う方程式

電気回路網の回路に流れる電流の大きさや電圧降下を知るには、電圧や電流に関する連立方程式を作って未知数を求めていく必要があります。

そこで、一つめに作る方程式は回路網に流入する電流の方向を定め、電流の「入」「出」の収支を定義する必要があります。二つめに、それぞれの回路網の中に流れる電流の方向を決めて抵抗によって低下する電圧の方程式を作り、知りたい電流の大きさや方向性の妥当性を求めることになります。このような回路を計算するとき、キルヒホッフの法則を使ったやり方があります。

(1) キルヒホッフの第１法則

１点に流入する電流 I_i〔A〕の総和は 0 になるという法則です。これを式で表すと次のようになります。

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0$$ （電流則または接点法則：*kirchhoff's current law*）

この式は、１点に流入する電流を＋、１点から流れ出る電流を－としたとき、出入りの収支は 0 になるという意味の式で、電流に関する約束なのでキルヒホッフの電流則又は第１法則と呼ばれています。

(2) キルヒホッフの第２法則

回路網中の閉回路にある各抵抗による電圧降下の総和は起電力の総和は等しいという法則で、$R_1I_1 + R_2I_2 + \cdots + R_nI_n$ を電圧降下の総和、$E_1 + E_2 + \cdots + E_n$ を起電力の総和としたとき、$R_1I_1 + R_2I_2 + \cdots + R_nI_n = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$ になるとしたものです。

回路網中にいくつも電源があっても電圧降下の収支は、いつも電源と同じになるという意味の式です。

$$\sum_{i=1}^{N} V_i = 0$$ （電圧則またはループ法則： *kirchhoff's voltage law*）

この法則を、キルヒホッフの電圧則または第２法則と呼んでいます。電気回路網を計算するときには、この電流則と電圧則を使って未知数を求めます。未知数は網目回路に流れる電流の大きさと、その方向、そして電圧降下の値になります。

早速、練習問題をやってみましょう。

【練習問題】

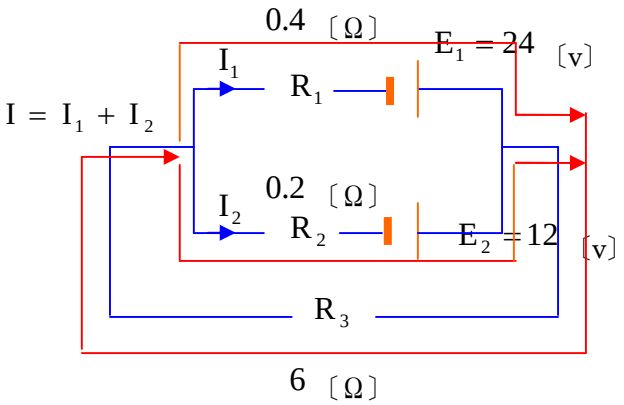


図 12

図 12 に流れる電流とその方向を求めます。まず並列回路に流れる電流を未知数として電流則と電圧則で方程式を作ります。流れる回路が２回路ですから作る方程式は２元の連立方程式になります。

$$0.4I_1 + 6.0(I_1 + I_2) = 24 \quad \text{——} \quad ①$$
$$6.0(I_1 + I_2) + 0.2I_2 = 12 \quad \text{——} \quad ②$$
$$6.4I_1 + 6.0I_2 = 24 \quad \text{————} \quad ③$$
$$6.0I_1 + 6.2I_2 = 12 \quad \text{————} \quad ④$$

④式から $I_1 = \dfrac{12.0 - 6.2I_2}{6.0}$ として「③式」に代入します！

$$6.4 \times \left(\frac{12.0 - 6.2I_2}{6.0} \right) + 6.0I_2 = 24.0$$

$$6.4 \times \frac{12.0}{6.0} - 6.4 \times \frac{6.2}{6.0} I_2 + 6.0I_2 = 24.0$$

$$\frac{76.8}{6.0} - \frac{39.68}{6.0} I_2 + \frac{36.0}{6.0} I_2 = 24.0$$

$$-\frac{39.68}{6.0} I_2 + \frac{36.0}{6.0} I_2 = 24.0 - \frac{76.8}{6.0}$$

$$-3.68I_2 = 6.0 \times (24.0 - \frac{76.8}{6.0}) \qquad I_2 = -\frac{67.2}{3.68} = -18.3 \text{〔A〕}$$

$I_2 = -18.3$〔A〕を「$I_1 = \dfrac{12 - 6.2I_2}{6}$」に代入し、$I_1$〔A〕を求めます。

$$6.0I_1 = 12 - 6.2(-18.3)$$
$$6.0I_1 = 125.46$$
$$I_1 = 20.91 \text{〔A〕}$$

計算結果から、I_1〔A〕は計画どおりの流れの向きになりますが、I_2〔A〕は－のため、流れの向きは逆向きとなります。この手法は、方程式を作る上で大切ですから、確実に自分のものにして下さい。計算した結果を元の回路図に記入したものが図 13 です。

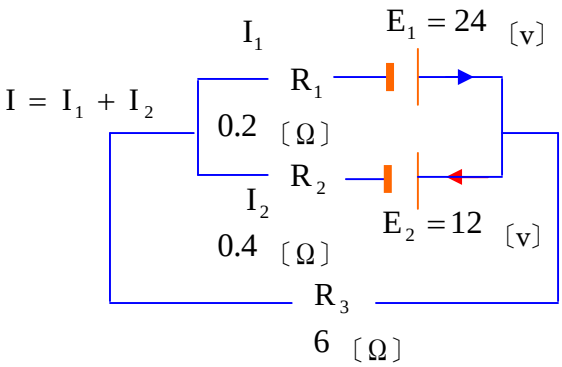


図 13

第３章　座標の数学

１．複素数

大きさと方向が異なる数の計算は数直線で求めることはできません。ここでは平面上の数として代表的な複素数を学び、その数の扱い方を学習します。複素数 $(complex\,number)$ は、実数部（*real part*）と虚数部（*imaginary part*）からなる平面上（座標上）の１点（$p(a, jb)$）を表す数です。これから大切な複素数を学習しましょう。

交流の電気回路は、電力を熱に変換する抵抗Ｒや時間的に増減変化する電流の流れの変化を妨げようと働くインダクタンス（L〔H〕）、同じように積極的に流そうと働くキャパシタンス（C〔F〕）が含まれますので、電圧と流れる電流の関係には遅れや進みが発生します。このような電気回路の計算は、最早、数直線では求めることができません。この問題には複素数を使って解決をすることになりますが、まず複素数とはどのような数なのか、なぜ電気で使われるかを学びます。

(1) 複素座標（複素平面）

図 14 は複素平面を示しています。まず横軸に実数部（*real part*）、縦軸に虚数単位 j を持つ虚数部（*imaginary part*）を配置する座標です。

この座標には、虚数単位があるため、通常使用するグラフが静止座標と違って回転する角を示す座標に早変わりする特徴をもっています。

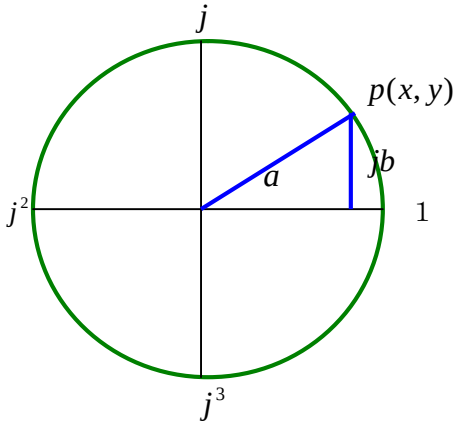


図 14

複素数 j はベクトルの回転オペレータ！

複素平面の j の役割は、j は 90°、j^2 は－1 で 180°、$j^3 = j \times -1$ で 270°、$j^4 = +1$ と j が増えるにつき、反時計方向に回転し元の基準点である 0°（360°）に戻る動作を表すため、ベクトルを反時計方向に回転させる回転オペレータといっています。

(2) 複素数の特徴の整理

① 複素数は実数と虚数単位 j を持つひとつの数です。

② 虚数単位 j は 2 乗して負の値になる数です。（$j^2 = -1$ です。）

③ 複素数は $z = a + jb$ で表します。（特に電気では Z を複素関数といいます。）

④ 虚数単位 j は複素数の点 $p(x, y)$ を座標上で任意に回転（0～2π（360°））させる演算子でオペレータと呼ばれています。

(3) 複素数をもう少し詳しく調べる

複素数は大きさと方向の異なった数を座標上で幾何学的に表し、その角度や長さを合成する数学と考えて下さい。

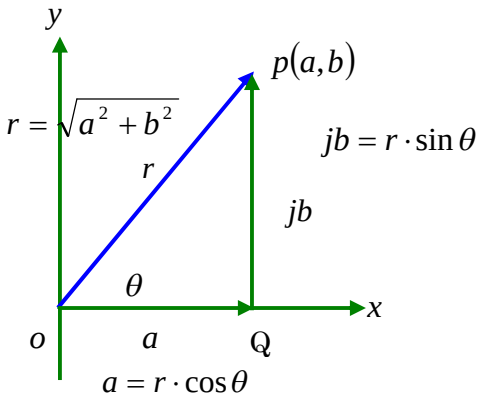


図 15

図 15 は、a, b の点が平面上に $p(a,b)$ なる 1 点を表しています。この点の大きさは、複素関数の式 $z = a + jb$ で表わし、a を実数部、b を虚数部とし、x を実軸、y を虚数軸として置くことができます。$z = a + jb$ は座標上の 1 点 $p(a,b)$ を表すとき、斜辺を $op = r$、$\angle Qop = \theta$ とするとき、次のように三角関数で表すこともできます。

辺 a の大きさ → $a = r\cos\theta$ （$r \times \left(\frac{a}{r}\right)$） （$\cos\theta = \frac{a}{r}$）

半径 r の大きさ → $r = \sin\theta$ （$r \times \left(\frac{b}{r}\right)$） （$\sin\theta = \frac{b}{r}$）

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

三角形の傾斜角 → $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$（これを位相ともいいます。）

半径rは、複素関数zの絶対値、θは、rの偏角または位相といいます。

この複素数を$z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$と表したものを複素数の三角関数表示といい、絶対値$r$と位相$\theta$〔$rad$〕を使って$r\angle\theta$と表したものを極座標表示といいます。

この表示法は、複素数$z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$との間に$r \cdot \varepsilon^{j\theta} = r\angle\theta$　の関係のあることを示すものです。

(4) 複素数の計算と極座標表示の関係

$p(a,b)$が$2 - j6$の関係にあるとき複素数を極座標で表示します。

$$r = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 6.32 \qquad \tan\theta = \frac{-6}{2} = -3 \text{〔}rad\text{〕}$$

角度〔θ〕で表す場合は、$\theta = \tan^{-1}\dfrac{-6}{2} = -71.57$〔°〕とします。

$2 - j6$の複素数の偏角（角度）は第４象限に存在するので表示は、$\theta = 360$〔°〕－71.57〔°〕=288.43〔°〕になります。以上から、複素数と極座標表示の双方は次式のように表すことができるのです。

$$z = 6.32(\cos(71.57) + j\sin(71.57)) = 6.32\angle 288.43 \text{〔°〕}$$

(5) 複素数の性質と計算上の約束

複素数は次の約束がありますので覚えましょう。

【複素数の性質】

① $a + jb = 0$のなり立つのは$a = b = 0$のときだけです。

② $a + jb = c + jb$がなり立つのは辺の大きさが$a = c$、$b = d$のときだけという性質があります。

【複素数の計算の約束】

① 複素数のたし算

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$$

② 複素数の引き算

$$(a + jb) - (c + jb) = (a - c) + j(b - d)$$

③ 複素数のかけ算

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(bc + ad)$$

$$(a + jb)(c + jd) = ac + j^2bd = (ac - bd) + j(bc + ad)$$

$$= (ac - bd) + j(bc + ad) \text{（}j^2 = -1\text{に等しいため）}$$

④ 複素数の割り算

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}j + \frac{bc - ad}{c^2d^2} \qquad \text{（但し、}c + jd \neq 0\text{）}$$

$$\frac{a+jb}{c+jd}=\frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)}=\frac{ac+j(bc-ad)-j^2bd}{c^2-(jd)^2}$$

$$\frac{(ac+bd)+j(bc-ad)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+j\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

⑤　複素数の交換、結合、分配則

複素数も実数と同じように換則や結合則、分配則がなり立ちます。

α、β、γが、それぞれ複素数のとき次のような約束があります。

・$\alpha+\beta=\beta+\alpha \quad \alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$　【交換則】

たしてもかけても基準となる数を入れ替えても答えは同じ。

・$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma) \quad \alpha(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\gamma$　【結合則】

たし算やかけ算の順序を入れ替えても答えは同じ。

・$\alpha(\alpha+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$、$(\beta+\gamma)\alpha=\beta\cdot\alpha+\gamma\cdot\alpha$　【分配則】

係数の（　）の項への分配は前後してやっても答えは同じ。

2．ベクトル

いよいよベクトルの登場です。力や速度、加速度、電圧や電流のように、大きさと方向をもつ量をベクトル量と呼び、時間など大きさのみをもつ量をスカラー量と区別されますが、電気では電圧と電流の位相関係や電力を説明するときに三角関数とともにベクトルを使います。

(1) ベクトル表示

ベクトルは、大きさと方向をもった数で２π〔*rad*〕の角度で表す象限の中で表します。従って複素数の座標上でも表せるのです。ここで矢印はベクトルの回転方向を示しています。

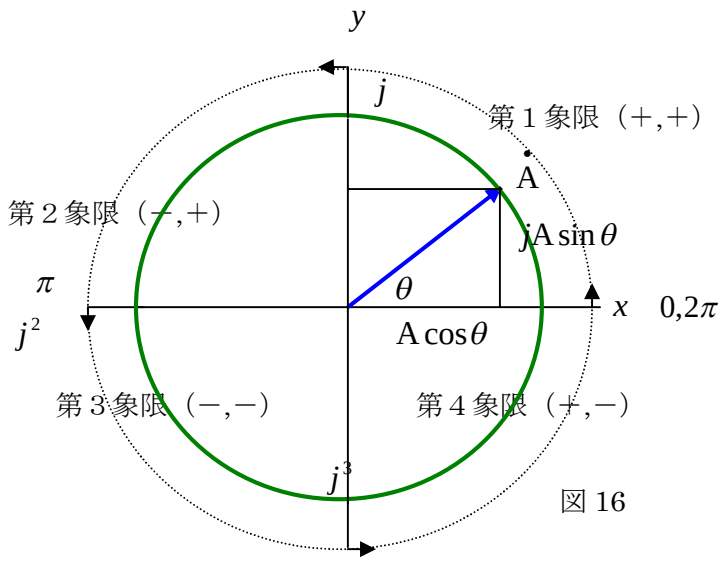


図 16

１象限から、各象限の座標符号は複素座標の約束から、第１象限は*x* *y* とも＋、

第２象限 x は－、 y は＋、第３象限は、 x y とも－、第４象限の x は＋、 y は－です。ベクトルを描くときは次の約束がありますので覚えましょう。

約束

① ベクトルは、図 16 のように時計と反対の向きに回転角を与えます。

② ベクトルは、０～２π〔*rad*〕の範囲の角度をとります。

③ ベクトルの合成は大きさと角度の二つの数のたし算です。

④ 複素数座標でベクトルを描くとき、横軸は実数軸、縦軸は虚数軸を与えます。

図 17 は、複素数で表すベクトルの線分が、$\overrightarrow{OA} = \dot{F}$、$\overrightarrow{OB} = \dot{F}'$としたときのベクトル合成を示し、$\dot{F} + \dot{F}' = \dot{C}$、$\overrightarrow{OA} = \dot{F}$、$\overrightarrow{OB}' = -\dot{F}'$としたとき、ベクトル合成は$\dot{F} + (-\dot{F}') = \dot{C}'$になることを示しています。$\dot{F}$はベクトルの意味です。

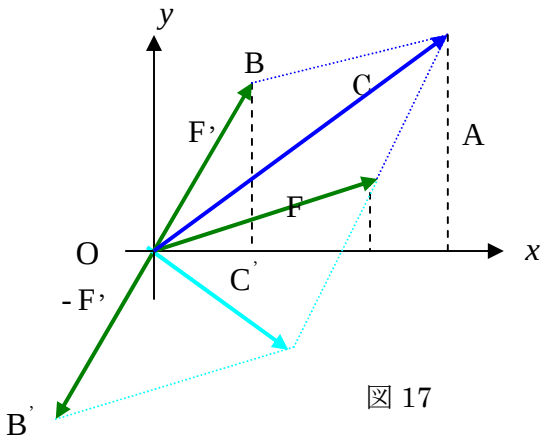


図 17

(2) ベクトルと三角関数の関係の表示法

三角関数を使ってベクトルの大きさと方向が異なる数の合成方法を示します。

原点 O とした座標にベクトル$\dot{F}$をとるとベクトル$\dot{F}$の分力は、三角関数では図 18 のように表せます。

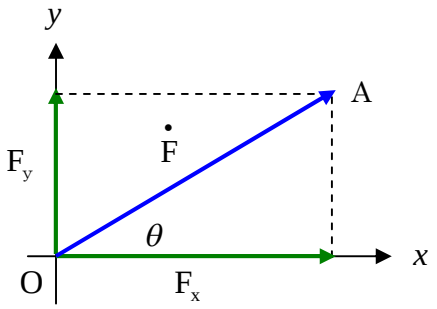


図 18

F_x の分力、$F_x = \dot{F} \times \cos\theta = \dot{F} \times \left(\dfrac{F_x}{\dot{F}} \right)$　（$\cos\theta = \dfrac{F_x}{\dot{F}}$）

F_y の分力、$F_y = \dot{F} \times \sin\theta = \dot{F} \times \left(\dfrac{F_y}{\dot{F}} \right)$　（$\sin\theta = \dfrac{F_y}{\dot{F}}$）

F_x と F_y のベクトルの合成は、$\dot{F} = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2}$　位相角（傾き）は、$\tan\theta = \dfrac{F_y}{F_x}$

です。このようにベクトルは、同一座標（表面）において $F = F_x + jF_y$ のように複素数の関数としても表すことができます。

(3) ベクトルと複素数の計算

複素数の計算は、実数と虚数部がセットになった一つの数ですから、常に、大きさと、方向の異なった数の合成を行う必要から数直線では表すことができません。

従って、次のような約束があります。

① 複素数のたし算

複素数はベクトルの計算によって合成します。

$\dot{A}_1 = a_1 + jb_1$ と $\dot{A}_2 = a_2 + jb_2$ のたし算をやって見ます。

ここで、二つの複素数のたし算は次のように表します。

$$\dot{A} = \dot{A}_1 + \dot{A}_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

ここで、二つの和は $|\dot{A}| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + j(b_1 + b_2)^2}$ です。偏角の合成は実数部どうし、虚数部どうしのたし算をし、$\tan\theta = \dfrac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2}$ で表わします。

偏角 θ が示す角は、$\theta = \tan^{-1}\dfrac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2} = \tan^{-1}\dfrac{b}{a}$〔°〕として、逆三角関数表示にすることによって、60 分表示でも表すことができます。

② 複素数のひき算

たし算と同じように絶対値の計算はひき算によって求めます。

二つの複素数　$\dot{A}_1 = a_1 + jb_1$ と $\dot{A}_2 = a_2 + jb_2$ のひき算は、$\dot{A}_1 - \dot{A}_2$ です。

$\dot{A}_1$ と $\dot{A}_2$ の実数部を $a = a_1 - a_2$、虚数部を $b = b_1 - b_2$ とすると、二つの複素数の

絶対値は、$\dot{A} = a - jb$ と書けます。

したがって偏角は絶対値の比から、$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$、$\theta = \tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ になります。

複素数の引き算は、実数部と虚数部どうしのひき算になります。

③　複素数のかけ算

二つの複素数　$\dot{A}_1 = a_1 + jb_1$　$\dot{A}_2 = a_2 + jb_2$ のかけ算は、$\dot{A} = \dot{A}_1 \cdot \dot{A}_2$ です。

$$\dot{A} = \dot{A}_1 \cdot \dot{A}_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = a_1a_2 + ja_1b_2 + ja_2b_1 + (j^2)b_1b_2$$
$$= (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1)$$

かけ算の絶対値｜$\dot{A}$｜は、｜$\dot{A}$｜$= \sqrt{A_1{}^2 \cdot A_2{}^2} = \dot{A}_1 \cdot \dot{A}_2$ ですから、それぞれの複素数のかけ算を行うことになります。

ただし、偏角は $\tan\theta = \tan(\theta_1 + \theta_2)$ で角度のたし算（$\theta = \theta_1 + \theta_2$）で求めます。

④　複素数のわり算

二つの複素数のわり算は二式をわる計算です。

計算は、$\dot{A} = \dfrac{\dot{A}_1}{\dot{A}_2}$ となり、$\dot{A} = \dfrac{\dot{A}_1}{\dot{A}_2} = \dfrac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2{}^2 + b_2{}^2} + j\dfrac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2{}^2 + b_2{}^2}$ です。絶対値の大きさは｜$\dot{A}$｜$= \dfrac{A_1}{A_2}$、偏角は $\theta = \theta_1 - \theta_2$ となり、角度のひき算になるのです。

⑤　複素数「$\dot{A} = a + jb$」に新たな実数「c」をかける計算

複素数に新たな実数をかける計算式は、$\dot{A} = c \cdot \dot{A} = c(a + jb) = c \cdot a + jc \cdot b$ となります。（但し、$c > 0$ のとき）位相角は $\tan\theta = \dfrac{c \cdot b}{c \cdot a}$、角度表示では $\theta = \tan^{-1}\dfrac{c \cdot b}{c \cdot a}$〔°〕となり、この計算は、絶対値の c 倍になります。

ただし、偏角は分母子に同一数を与えるだけなので変わりません。この関係を図 19 に示しました。

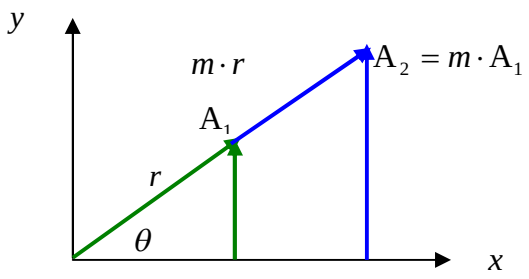


図 19

⑥　複素数 $\dot{A}$ に虚数単位「j」をかける計算

$$\dot{A} = j\ \dot{A} = j(a + jb) = ja + (j^2)\cdot b = -b + ja$$

j をかけると、絶対値 $\dot{A}$ は変化しないで偏角が $\frac{\pi}{2}(90°)$ 増加します。

従って、位相だけが 90°　進むことを示します。この関係を図 20 に示しました。

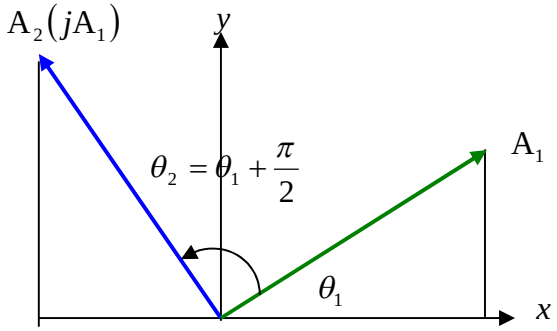


図 20

(4) ベクトルを使ったインピーダンスの表示法

図 21 は、自己インダクタンス L〔H〕の回路に正弦波の電流を流したとき、自己インダクタンス L〔H〕に発生する自己誘導起電力を e_L〔V〕とし、e_L〔V〕と i〔A〕の関係を示したものです。

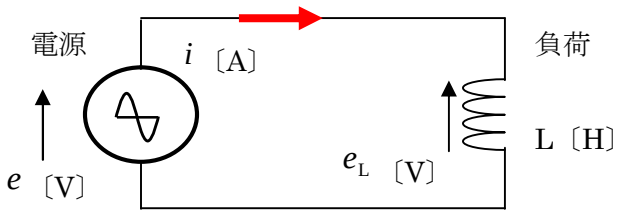


図 21

負荷側のコイル（インダクタンス L〔H〕）に交流を与えたとき、コイルの中で発生する起電力を示したものです。このときの起電力は次式に示すように電流の時間変化に比例するものです。

$$e_L = -L\frac{\Delta i(t)}{\Delta t} \quad 〔V〕$$

この起電力は、電源との間に常に $e - e_L = 0$ の関係のあることを表したもので、インダクタンスに現れる起電力が電源との間に次式のような関係を示します。

$$e = -e_L = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot \cos\omega t = \omega \cdot L \cdot I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad 〔V〕$$

左辺と右辺を比べると、起電力 e〔V〕の大きさは、電流の瞬時値の最大値 I_m の $\omega \cdot L$ 倍になっており、電流より位相が $\frac{\pi}{2}$〔rad〕進むことが分かります。

一見すると複雑そうに見えますが、図 22(1)のようにベクトルで表すと電圧と電流の関係はよく分かります。

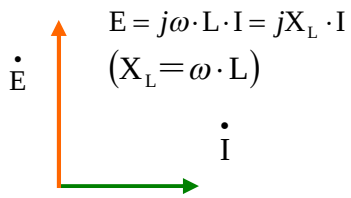


図 22(1)

R のみの回路では、図 22(2)に示すように熱消費するだけなので位相を遅らせたり進める性質がなく電圧と電流は同一位相（同相）になります。

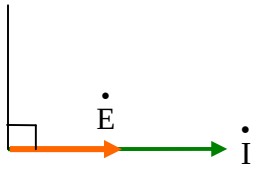


図 22(2)

C のみの回路では、図 22(3)に示すように電流が電圧より $\frac{\pi}{2}$ 進みます。

自己インダクタンス L の中で発生した逆起電力（ファラディ・レンツの法則による）に対して、静電容量 C〔F〕の回路は次のように考えます。

静電容量は水入れるバケツと考えると一杯に溜まって初めて水位ができ、バケツの底には水位に応じた圧力が生じるように C〔F〕に電流を流して満充電としたとき電圧が現れるとすると、電圧は水が溜まって初めて圧力が発生することと同じなので、電流は電圧より $\frac{\pi}{2}$ 進むというわけなのです。この関係を示すベクトルは電流

を基準として描くと、電流より電圧は$\frac{\pi}{2}$遅れて描くのです。

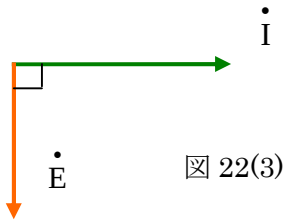


図 22(3)

RLC のベクトルをひとつの平面に同時に表したものが図 22(4)です。

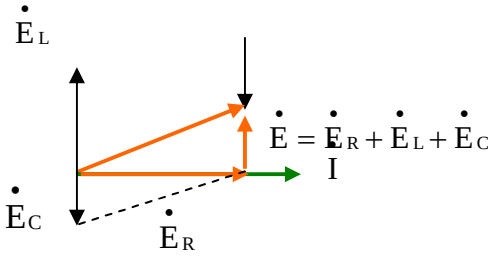


図 22(4)

３．関数

(1) 比例と反比例

x と y などの数が、互いに変化する数量関係にあることを関数の関係にあるといいます。そして $y = k \cdot x$ という関係があるとき、y は x に比例するといい、このときの k を比例定数といいます。

逆に、$y = \frac{k}{x}$（比例定数 k は一定）のとき y は x に互いに反比例するといいます。

(2) 関数とは

いま等式 $y = f(x)$ があるとき、左辺を右辺が求まれば自動的に求まるとして従属変数、右辺は自身のもつ変数で値が決まる意から独立変数とよびます。

いい方を変えると、関数はどのような数も許容する入れもの、またはブラックボックスと考えてよいのです。私たちが扱う関数の種類には初等的な関数から高等関数まで多士済々ですが、ここで学習されている入門者の方は一次関数、二次関数、三角関数を自由に操って頂きたいので、重点的に説明をしました。

注意

関数 $y = f(x)$ における $f(x)$ の(　)の中の x の記述は、様々な変数を表す記号です。数値の次元（*di.men.sion*）ではありませんので誤解のないように！

(3) 一次関数とは

関連して変化する二つの数や量 x、y の間に $y = ax + b$ という等式がなり立つとき、

y を x の一次関数といいます。

このとき a と b は定数、a は x の係数、b は定数項、y や x は変数です。

関数は、x を決めてしまえば自動的に y が求まるため、y のことを従属的な変数（従属変数）、x を独立変数といいます。

独立変数 x はどのような値も挿入できるので、一次関数の y と x は座標に直線の傾きを表すのに使われます。

(4) 二次関数とは

電力のように出力と電流の関係が $p = r \cdot i^2$〔W〕で表されるような等式では、電流 i〔A〕が従属変数 p に対して 2 乗で変化するため二次関数といいます。

(5) 三角関数

時間的に大きさの変化する交流の電気を「R、L、C」の素子に与えると、電流は電圧に対して遅れたり、進んだりします。

このようなとき座標や幾何学的な図面において、その状況が直視できれば便利です。

そこで、角度と長さの比や大きさや方向の異なる数や量を座標上で扱える幾何学的なツールとして三角関数やベクトルが登場したのです。

(6) 三角関数のまえにまずピタゴラスから

中学校では、図 23 に示すように直角三角形の三辺の長さの関係を学習しましたが、ここでは辺 a b c の大きさの関係が $a^2 + b^2 = c^2$（ピタゴラスの定理）を使って三角関数を考えます。

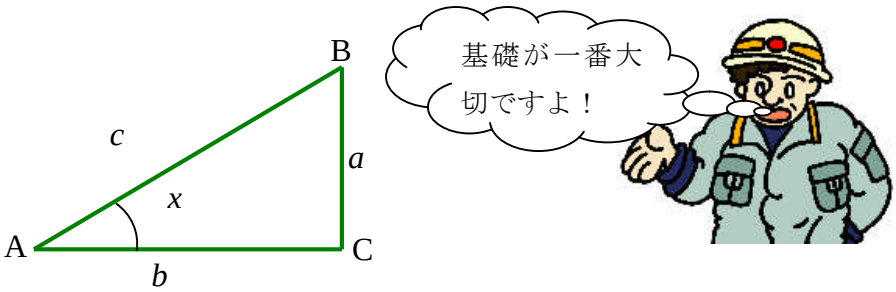


図 23

数直線の数学では a と b のたし算は、$a + b = c$、$a + b = c$ から $a = c - b$、$b = c - a$ とすることができましたが、これは辺 a と辺 b の四角形が $a \cdot b = c$ であったために、$a = \dfrac{c}{b}$ と、$b = \dfrac{c}{a}$ がなり立つことが理由でした。

図 23 のように直角三角形 A、B、C として∠A を x とすると、x の値が定まると、自動的に $\dfrac{a}{c}$、$\dfrac{b}{c}$、$\dfrac{a}{b}$ の値も求まります。

このような数の比の値は三角形の大小には直接関係しないので三角形の値は角度 x の関数と考えることができるので、$\dfrac{a}{c} = \sin x$、$\dfrac{b}{c} = \cos x$、$\dfrac{a}{b} = \tan x$ と表すこ

とができます。

ここで、$\sin x$ をサイン x 、$\cos x$ をコサイン x 、$\tan x$ をタンジェント x といい、三角関数$(trigonometric\ function)$と定義されています。

関数という限り、変数が必要になりますが三角関数では角度 x が変数なのです。

三角関数には、逆関数もあって、それぞれ名前が付いていますので紹介します。

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{c}{a}=\cos ecx$$ （コセカント x）

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{c}{b}=\sec x$$ （セカント x）

$$\frac{1}{\tan x}=\frac{b}{a}=\cot anx$$ （コタンジェント x）

直角三角形の辺の長さは、$a^2+b^2=c^2$ の関係がありますから、a と b 及び c は互いに次のように表せます。

$a=\sqrt{c^2-b^2}$ 、$b=\sqrt{c^2-a^2}$ 、$c=\sqrt{a^2+b^2}$

【例題】

図 23 の直角三角形で直角を挟（はさ）む二つの辺が $a=\sqrt{3}$ 、$b=\sqrt{6}$ としたとき、θ に対する三辺の長さの辺の比を求めてみましょう。

① $\frac{a}{c}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

② $\frac{b}{c}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

③ $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{3}{6}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2\times\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(7) x を θ に置き直し $\sin\theta$ 、$\cos\theta$ 、$\tan\theta$

各辺の長さを $\frac{a}{c}$ としたとき $\sin\theta$ 、$\frac{b}{c}$ としたとき $\cos\theta$ 、$\frac{a}{b}$ としたとき $\tan\theta$ としましたが、図 24 に辺の長さの比較で表した三角関数を示しました。

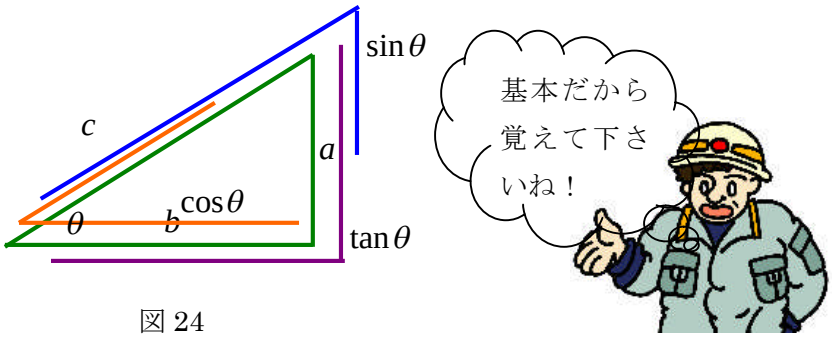


図 24

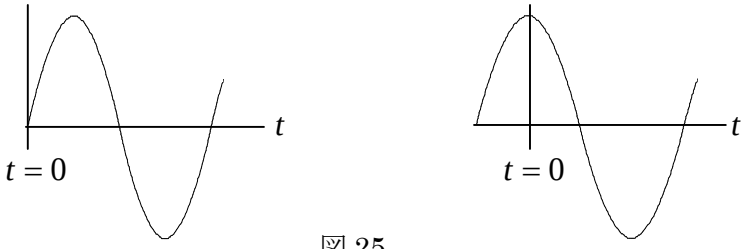
sin （サイン）は斜辺と垂線の長さの比

cos （コサイン）は斜辺と底辺の長さの比

tan （タンジェント）は底辺と垂線の長さの比

(8) $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の違い

sin と cos 波形を見ると図 25 のように sin の最大値は 90°で 1、最小値は 0°で 0、cos の最大値は 0°で 1、最小値は 90°で 0 になります。



sin 波形　　図 25　　cos 波形

(9) 三角関数の相互の関係

【互いの逆三角関数をかけると 1 になります。】

① $\sin\theta \cdot \cos ec\theta = 1$

② $\cos\theta \cdot \sec\theta = 1$

③ $\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$

【ピタゴラスの定理を使った変形】

① $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$（ピタゴラスの定理）

② $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

③ $1 + \cot^2\theta = \cos ec^2\theta$

(10) 弧度法

三角関数は、角度の回転や波形の速度なども表すことができ、角度の回転速度（角速度 $\omega\left[\frac{rad}{\sec}\right]$）〔$rad$ （ラジアン)〕も扱えるので、直角三角形に比べて重宝に活用されています。いま、図 26 のように半径 r とする円の中心 o において、円弧 $\overset{\frown}{A \cdot B}$ の長さを半径 r に等しい長さとしたとき、円弧の長さと中心の角度は比例するため次の関係がなり

立ちます。

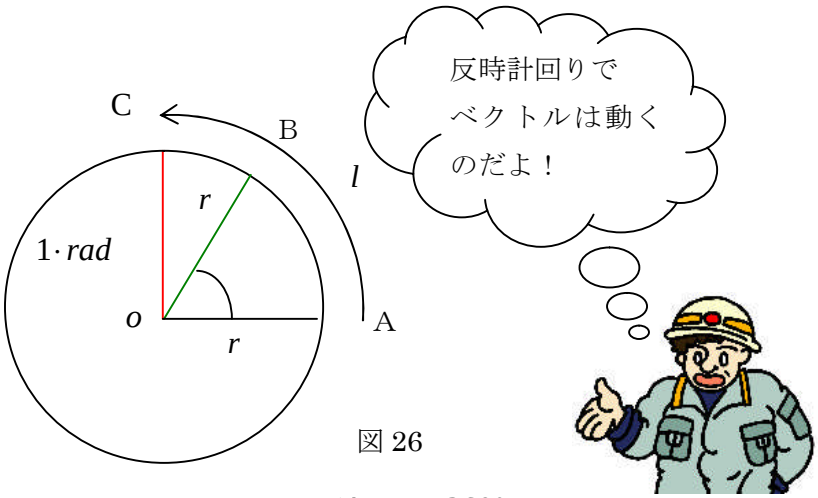


図 26

$\dfrac{\angle AoB}{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{360^{\circ}}{2\pi \cdot r}$ ですから、円弧 $\overset{\frown}{A \cdot B}$ は「$\dfrac{\angle AoB}{r} = \dfrac{360°}{2\pi \cdot r}$」の関係、同様に、$\angle AoB$ は、$\angle AoB = \dfrac{180°}{\pi}$（ここで π は円周率の 3.1416 です。）となるので、任意の角度との間には、$\theta = \dfrac{\pi}{180}\alpha$〔$rad$〕がなり立ちます。

この等式は、三角関数と同様に半径の大小に全く関係なく一定値を示しています。

角度表示は、弧度法の 1［rad］といって、角度（°）で表すと $57°17\ 44''$（$\dfrac{180°}{\pi}$）です。

$\dfrac{\angle AOC}{\angle AOB} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{l}{r}$、$\angle AOC = \theta$、$\angle AOB = \dfrac{r}{r} = 1$ ですから、$\dfrac{\theta}{1} = \dfrac{l}{r}$ から l の長さは、$l = r \cdot \theta$ になります。

(11)　三角関数の応用

次は、三角関数のたし算やひき算はどのような仕組みになっているか調べます。

特に電気の計算はベクトルを使った計算や、あとにでてくる電気の変化の過程を調べる上で、三角関数の仕組みを知っておくことが大変重要になってきますので、ここでは三角関数のたし算や三角関数どうしの関係はどのようになっているか調べて行きます。

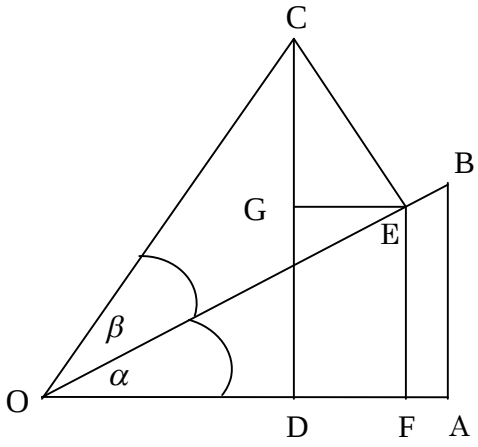


図 27

図 27 は、90°より少ない範囲において角度αとβをもつ二つの三角関数を表しています。まず二つの角のたし算を考えます。

いま、$\sin\alpha = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OB}}$　$\sin\beta = \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{OC}}$　$\mathrm{OB} = \mathrm{OC} = 1$であるとします。この関係から、

$\sin\alpha = \dfrac{\mathrm{AB}}{1}$　$\sin\beta = \dfrac{\mathrm{CE}}{1}$　と置くことができます。

次に、$\sin(\alpha+\beta) = \mathrm{CD}$の線分を二つに分けて、$\mathrm{CD} = \mathrm{CG} + \mathrm{GD} = \mathrm{CG} + \mathrm{EF}$とすると、∠ECG＝∠α、$\mathrm{CG} = \mathrm{CE} \times \left(\dfrac{\mathrm{CG}}{\mathrm{CE}}\right) = \mathrm{CE}\cos\alpha$になります。

このとき$\mathrm{CE} = \sin\beta$なので、$\mathrm{CG} = \sin\beta \cdot \cos\alpha$になります。

この関係を使うと、$\mathrm{EF} = \mathrm{OE} \times \dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{OE}} = \mathrm{OE}\sin\alpha$となります。なお式中に書いた∠の記号は三角形の偏角または三角形が回転するときの進み角（リード）を示す記号で、下向きで表示した逆記号は遅れ角（ラグ）という意味を持たせた記号です。

$\mathrm{OE} = \cos\beta$、$\mathrm{EF} = \cos\beta \cdot \sin\alpha$だから、

$\mathrm{CD} = \mathrm{EF} + \mathrm{CG} = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\beta \cdot \sin\alpha = \sin(\alpha+\beta)$

になり、三角関数の正弦の加法定理のたし算の形になります。

今度は、αとβの角度をひき算した場合を調べます。

図 28 から、OA＝OB＝１とすると、$\sin(\alpha-\beta) = \mathrm{BF}$、$\cos\beta = \mathrm{CO}$、$\sin\beta = \mathrm{CD}$

$\mathrm{BF} = \mathrm{CE} - \mathrm{CD}$ですから、CEは、$\mathrm{CE} = \mathrm{CO} \times \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CO}} \times \mathrm{CO}\sin\alpha = \cos\beta \cdot \sin\alpha$

CDは、$\mathrm{CD} = \mathrm{CB} \times \dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{CB}} = \mathrm{CB}\cos\alpha = \sin\beta \cdot \cos\alpha$になります。

以上から、二つの三角形の角度の差BFは、次に示すように三角関数の加法定理の正弦のひき算の形になります。

$$\mathrm{BF} = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta = \sin(\alpha + \beta)$$

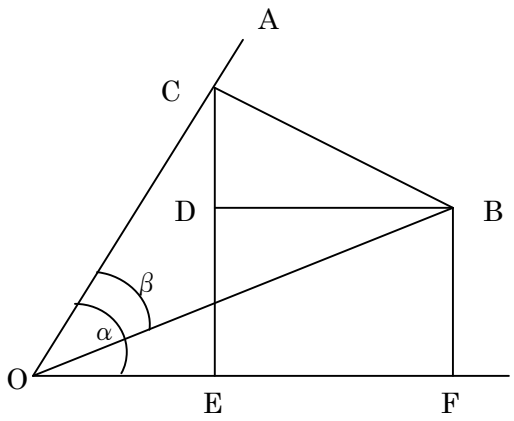


図 28

次に、tan の α と β のたし算の形を調べてみます。正接（tan ）は、三角関数の公式から $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ でした。この正接の二つの角度のたし算は $\tan(\alpha + \beta)$ です。

$\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ の関係を使用して、二つの正接角のたし算の形は次のようになります。

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

ここで右辺の分母子を $\cos\alpha \cdot \cos\beta$ で、割り算すると次式を得ます。

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

この式から $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$ が得られ、正接の二つの角のたし算の形となります。

(12) その他の公式を調べる

公式を覚えることは大切ですが、使う公式がどのように出来上がっているのか理解していれば、自分でも変形ができて計算をするときに非常に助かります。

いま正弦の加法定理において α と β の二つの角度が同じであるとすると、倍角の公式といった公式が求まります。

【正弦の倍角の公式を求める】

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$ ｜（β を α としたとき）

「｜」の記号は、**ここで〇〇としたとき**という意味に使います。

$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\alpha\cdot\sin\alpha$

この式を整理して、$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ とすると、倍角の公式が導かれます。

【余弦の倍角の公式を求める】

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$ ｜（β をαとしたとき）

$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\sin\alpha$

ここで$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$の関係を使って次式とします。

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha$

この式は次のように整理できます。

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ 、$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

この式は余弦のたし算の形になります。

【正接の倍角の公式を求める】

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$ ｜（β をαとしたとき）

そのまま整理すると「$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$」になって、「tan の倍角の公式」を導くことができます。

【半角の公式を求める】

次は、倍角の公式から半角の公式に変形できることを調べます。

いま余弦の倍角の公式のαを$\dfrac{\theta}{2}$とすると、$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

が求まり、また次のようにすれば余弦と正弦の半角の公式も導くことができます。

【余弦と正弦の半角の公式を求める】

$\cos\theta=2\cdot\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)-1=1-2\cdot\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

この式を$1+\cos\theta=2\cdot\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$と変形し、$\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$

また$\cos\theta=1-2\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$と変形し$2\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)=1-\cos\theta$

この式から、$\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$

また、$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1+\cos\theta}{2}$ から、$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ が作れます。

$\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1-\cos\theta}{2}$ から、$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ が作れ、これらの関係から、角が $\frac{1}{2}$ になったときの、余弦と正弦の三角関数を求めることができます。

【同じように正接の半角も調べてみましょう】

tan は、$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ ｜（α を $\frac{\theta}{2}$ としたとき）なので、右辺の二式を使って求めます。

余弦と正弦の半角の式が $\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ 、$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ ですから、これを正接の式に代入すると、次式のように正接の半角の公式を導くことができます。

$$\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}}\cdot\pm\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}}$$

半角の公式への変換は、倍角の公式の角度を $\frac{\theta}{2}$ にすることによって求まり、±の符号がどの象限にあるかによって決まります。

【かけ算の形をたし算の形に変換する】

加法定理を使用して「足し算の形や引き算の形をかけ算」の式に変換します。

ここでは複数の角度を扱うために α と β を使います。

正弦のたし算の式　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$

正弦の引き算の式　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\cos\beta\cdot\sin\beta$

この２式をたし算すると左辺と右辺は次のようになります。

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta$

ここで $\alpha+\beta=\mathrm{A}$ 、$\alpha-\beta=\mathrm{B}$ とすると、$\alpha=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}$ 、$\beta=\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}$ になります。

次に、このαとβを正弦と余弦の加法定理の式に代入すると、次のように置き替えることができます。

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cdot\cos\beta$$

これを再度、$2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$　と置きなおして両辺を$\frac{1}{2}$倍すれば、次式に示すかけ算の形をたし算の形に変換することができるのです。

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

(13) 一般角の三角関数

図 29 は、半径 OA とする半直線が点 O の周りを回転して OP の位置まできたときの角度を示したものです。このように回転する角度を一般角といい、記号を α で表します。

三角関数 θ〔rad〕を一般角 $\theta = 360° \times n + \alpha$〔°〕のように拡張すると三角関数も回転する関数として表せます。

一般角で表わすとは、0～2π〔rad〕の間（1 象限～4 象限）のどこにでも角度を表せるとするもので、回転磁界や位相、力率を扱う電気には大変有用になっています。

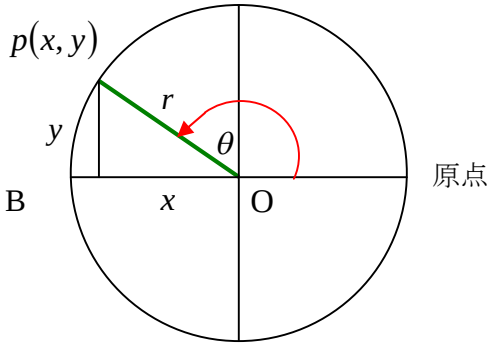


図 29

【改めて一般角とは】

いま図 29 の点 $p(x, y)$が回転して円周上を動いた距離を半径「r」で割ると、任意の角度が求まります。ここで角度の単位はrad（ラジアン）です。

図 22 において、原点から 1 回転したときの角度は、$\frac{2\pi\cdot r\times 1}{r} = 2\pi$〔$rad$〕、$\frac{1}{2}$回転したときの角度は、$\frac{2\pi\cdot r\times\frac{1}{2}}{r} = \pi$〔$rad$〕です。

一般角で表示することは、三角関数の角度が図 22 の円内の任意位置の角度をとることを意味するのです。

今度は、一般角でもピタゴラスの定理が成りたつことを調べてみます。いま $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を一般角 α で表します。sin と cos は、図 22 からそれぞれ $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$、$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$ です。この関係を三角形のピタゴラスの定理に代入して一般角でもなり立つか調べます。

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{r^2}$$

$x=-\mathrm{OB}$、$y=p\mathrm{B}$、これを上の式に代入すると

$$(-\mathrm{OB})^2+p\mathrm{B}^2=\mathrm{OB}^2+p\mathrm{B}^2=\mathrm{O}p^2$$

になり、$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\dfrac{x^2+y^2}{r^2}=\dfrac{\mathrm{O}p^2}{\mathrm{O}p^2}=1$ から、一般角で表しても三角比の三角関数と同じに扱えることが分かります。

(14) 正弦波起電力の周期関数

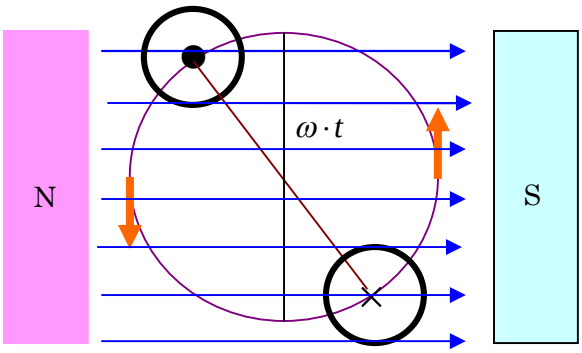


図 30

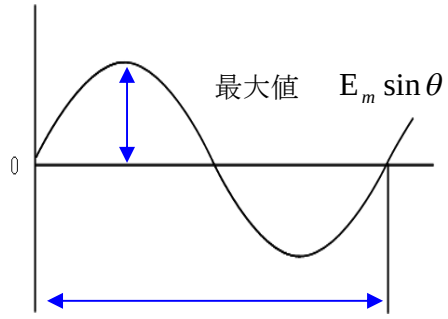
図 30 は回転電機子形発電機を一定の角速度 ω〔$\dfrac{rad}{\sec}$〕で回転する導体を配置したものです。この導体は、時間 t〔sec〕の経過に伴い刻々と回転角を変化させていき、一定時間毎に方向の反転する交番起電力 e〔V〕を発生させます。

起電力が交番するしくみは同一地点で同じ方向に導体が回転するからです。

このとき発生する交番起電力は正弦(sin)波の交流の起電力といい、1 回転したときに導体に発生する起電力の波形が図 31 です。

θ と ω の関係は、$\theta=\omega\cdot t$ の関係にあります。この等式の意味は、一定速度で回転する角速度が分かっているとき、その時間における角度を示すというものです。

$\because\quad \theta=\omega\cdot t$〔$\dfrac{rad}{\sec}$〕〔sec〕＝〔$rad$〕です。



１回転の周期（T〔sec〕）

図 31

交流の波形の１つをとって、１周波（*cycle*）といいます。どんな速さの交流波形の周波でも波の１つを指す呼び方です。その周波の時間の長さを周期といい、１秒間の数波の数を周波数（*frequency*）と表し、単位はヘルツ（*hertz*）をとります。従って、60〔Hz〕の電気は１秒間に１周波の交流波が 60 回発生する電気のことです。この波形は時間と共に大きさと方向の変る波形ですが、これらをひとまとめにして表す式を「周期関数」といいます。

$$e = E_m \sin\omega \cdot t \quad 〔V〕$$

小文字の筆記体で表した記号は、瞬間的な位置や量を示す瞬時の値です。

電気では瞬時値、平均値、実効値と３つの数値を使い分けますが、このとき記号の種類で使い分けをしています。上の式は瞬間的な起電力の大きさと波の形を同時に表す等式になっています。E_m を周期関数の瞬時値の最大値または振幅の最大値といいます。

$\sin\omega \cdot t$ の意味は、$\omega \cdot t$ 〔$\left(\frac{rad}{\sec}\right) \times (\sec)$〕によって瞬間的な位置を時間毎に位置決めができる数で表しているのです。

記号 ω は、波の速さの角速度（$2\pi \cdot f$ 〔$\frac{rad}{\sec}$〕）のことで、１秒間あたりの交番起電力（交互に流れの方向が変わる起電力）の速さを表しています。

【注意】

起電力の周期関数を $e = E_m \sin\omega \cdot t$ を $(\omega \cdot t - 30°)$ と表すのは間違です。

$\sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{6}\right)$ と書くのが正しい。その訳は、角速度は $\omega = 2\pi \times f$ 〔rad〕で表す弧度法表示ですから 60 分法の角度 $(°)$ とは違い、混同した使用法で意味をなさないからなのです。

どうしても 60 分法で表したいときは、$(360° \cdot f \cdot t - 30°)$ と書いて下さい。

１秒間の波形の回数数と回転時間との間には、次の関係があります。

周期は$\mathrm{T}=\dfrac{1}{f}$〔sec〕、周波数は$f=\dfrac{1}{\mathrm{T}}$〔Hz〕

このように式を使って電気の動きを表す式を周期関数といいましたが、この関数を使えば、波形どうしを合成するときや1枚の図の上に波形を複数表わせる利点があるので電気では大変よく使われています。

(15) 一般角のベクトルと交流波形

図 32 に正弦波交流（$e=\mathrm{E}_m\sin\omega\cdot t$〔V〕）と一般角のベクトル波形の関係を表しました。この図は交流波形とベクトル回転方向が虚数 j の働きによってわかります。

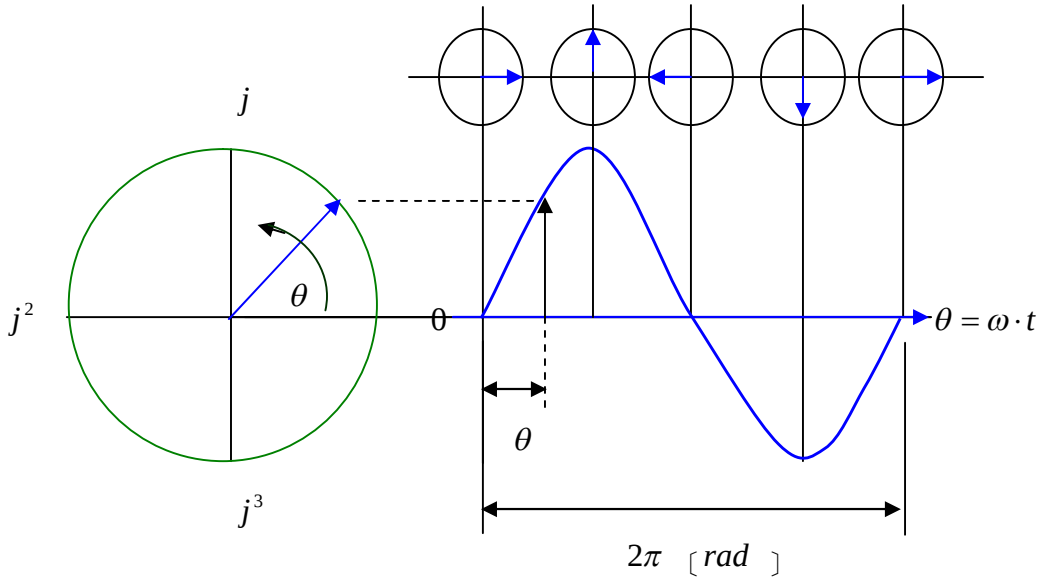


図 32

θ〔rad〕は 0 を基準とした遅れ角（或いは基準とのずれ）で位相といいます。

この表示方法は交流波形を説明するのに便利であると共に複数の起電力や電流を一度に書いて位相の遅れや進みを見るときに役立ちます。特にコイルの中で磁界を回転させて作った電気がどのように費やされるかを図上に表すときに便利です。

4．記号式を学ぶ

複素数を使った交流回路の計算に記号法という表示方法があります。この方法は、ベクトル図から計算する方法と違ってベクトルを記号で表し、代数的に計算結果を求めようとするものです。

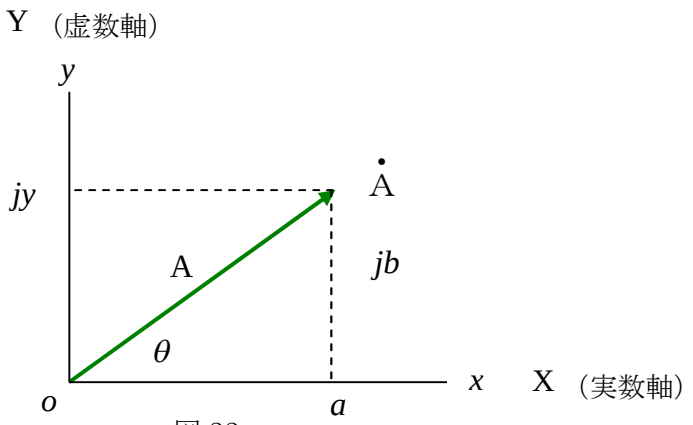


図 33

θ〔rad〕を偏角とするベクトル A が複素数座標上で定義できれば、単に記号的に表せます。例えば、$\overline{oa} \rightarrow x$、$j\overline{ob} \rightarrow jy$、$j = \sqrt{-1}$ と定義すると、次のようにベクトルと複素数が関係付けられます。

$$\dot{\mathrm{A}} = \overline{oa} + j\overline{ob} = x + iy$$

この関係から、ベクトル $\dot{\mathrm{A}}$ の絶対値と位相角 θ は次のように定義できます。

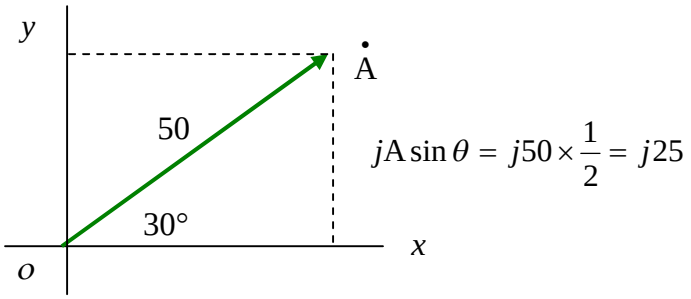
$$\dot{\mathrm{A}} = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

【計算】

ベクトル $\dot{\mathrm{A}}$ が $\dot{\mathrm{A}} = \mathrm{A}(\cos\theta + j\sin\theta)$ と表すとき、A を 50、$\theta = 30°$ とした場合いの各辺の大きさを求めます。

この式は $\dot{\mathrm{A}} = 50(\cos 30° + j\sin 30°) = 50\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right)$ になります。

さっそく、ベクトル図に書いて調べてみましょう。



$$j\mathrm{A}\sin\theta = j50 \times \frac{1}{2} = j25$$

図 34 $\quad \mathrm{A}\cos\theta = 50 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 43.3$

【計算】

$\dot{\mathrm{A}} = 50(\cos 30° - j\sin 30°) = 50\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right)$ の場合は、j が－j なので反時計の

回転になります。この式の絶対値は $\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$ で、y 軸上では $\cos\theta$ の項目が 0 になるからです。

したがって、$\pm j$ をとり、このベクトルは第 1 と第 2 象限では＋、第 3 と 4 象限では－になることを示しています。

第４章　変化率を学ぶ

１．あらためて関数とはなに

函数と書いた書物もありますが、$y = f(x)$で表される式のyを$f(x)$の関数といいます。この等式は右辺がきまれば自動的に左辺が求まるので左辺を従属変数と呼び、右辺を独立変数といいます。この関数には何でも収納できる入れ物と思ってください。

その意味で昔は函数とも書かれていましたよ。

さて、関数には一次式$y = ax + b$から$y = x^2 + 2x - 3$のような二次式、果ては高次の方程式、三角関数や指数関数、対数関数、無理関数など、その種類は多士済々でありまして、様々な種類の独立変数を収納する必要性から、一般的な表記方法が必要になってきます。

そこで、どんな変数でもとれる$y = f(x)$の表記方法が生まれたのです。

このように関数は$f(x)$の(　)の中の変数xを議論するのですから数値の単位次元などと混同しないように注意してくださいね。

２．平均の変化率と瞬間の変化率

私たちは、電磁誘導という不思議な現象に遭遇します。この現象は時間的に増加や減少する磁力線が導体を横切るとき、およそ電気回路も形成されていないのに、導体には起電力を現わし、果ては電圧計の針まで振らすものでした。

入門編の第１章で電気とはなにか、どうして電気が発生するのかといった問題を解決するために物性から説明し、ファラディ・レンツの法則で現れる電磁誘導現象を物性的に説明することが理解を速めるとして、原子や電子の挙動が成す現象と法則との関係を調べてきました。

その結果、外部磁界に呼応して電子の反磁性的挙動が原因するものと結論づけることができました。ファラディ・レンツの法則を物理的に理解するには、式中のΔを数学的な意味を把握しておかなければなりません。

$$e = -n \cdot \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$ 〔V〕（ファラディ・レンツの電磁誘導則）

この式のΔは、A から B 点の移動時間に関して途中経過は無視し始点と終点を直線で結んだときの変化の度合い、即ち、変化量を示しており数学では平均の変化率と呼ぶもので、Δは物理現象を数式で教える記号なのです。

電磁誘導則における時間当たりの導体に作用する磁界の大きさ$\Delta\phi$〔wb〕、nは導体の巻数（本数）、－は、導体に発生する起電力の方向を決定する記号です。

また、電磁誘導則は、磁力線の変化を妨げる向きに起電力を発生するとの記述もありますが、もっと平たく考えると、外部からくる磁界の増減を打ち消すように、その変化を抑制する収支活動が発生起電力ということができます。このときの磁力線の平

均の変化率や瞬間の変化率を数学的には説明する方法を調べてみましょう。

(1) 図を使って平均の変化率を調べる

x の数が a 増えて $x=b$ としたとき、x の増えた増分は $b-a$ です。

この $b-a$ を x の増分といって Δx と表します。次に x が増えて a から b に Δx だけ増加したとき、y の値も $f(b)-f(a)$ だけ、増加します。このときの y の増分を Δy とすると次の式ができます。

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

この関係を表に表したものが図 35 です。図からも平均の変化率は関数の値がいかなる経過を取ろうとも、A と B 点の間を直線で結び、この間の値の変化の大きさを求めようとするのが平均の変化率を表す式です。

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ で表す式は、直線の傾き（勾配）の大きさを表しており、求める計算式は、微小変化する Δx に対する増分 Δy を示しているのです。

また、図 35 の b を $a+\Delta x$ とおいて、$y=f(x)$ の x が $x=a$ から Δx だけ増えたとき、y は $f(a+\Delta x)-f(a)$ になるので y の増分 Δy は、$\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$ と表せるので、Δx の変化率は次のように表すことができます。

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

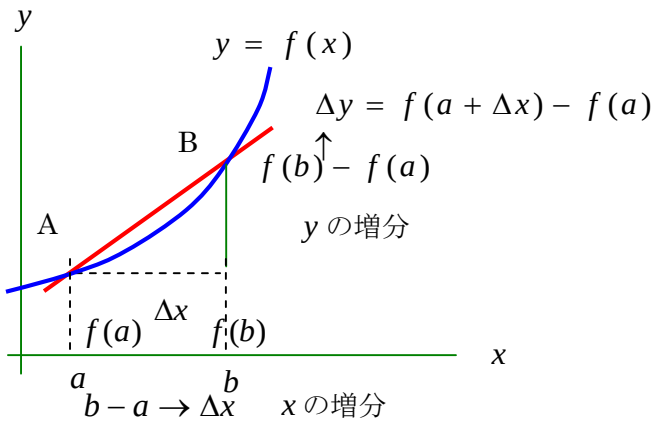
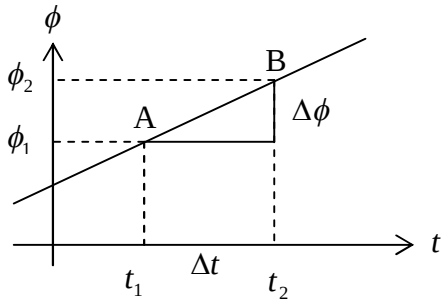


図 35

(2) $\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ の意味を整理する

$\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ は、t_1 から t_2 の間の ϕ の平均の変化率を表す式です。曲線区間の A 点と B 点を直線で結びその間の変化の度合いを表しているのです。導体に対して加える磁界が一定値では、起電力は生まれないことを式で説明しているのです。



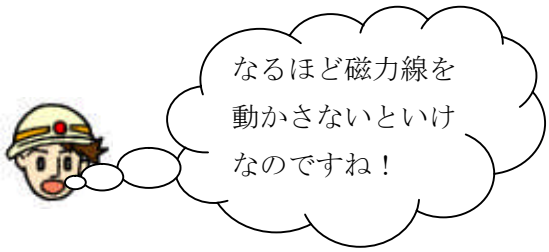


図 36

(3) 瞬間の変化率を調べる

平均の変化率の式を使って瞬間の変化率を考えます。

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$）の式において瞬間の変化率は$\Delta x$が極限値をとるときを考えた式が瞬間の変化率を表す式です。

極限値とは、$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$のように表します。

微小区間の変化量を示したものが図 37 です。

この図は、Δxの極限値（$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}$）は B が A に接近するとき$\Delta x$が限りなく$a$に近づくことを説明しており、$a+\Delta x$が矢印のように限りなく$a$に近づくときの瞬間の変化率を表したものです。

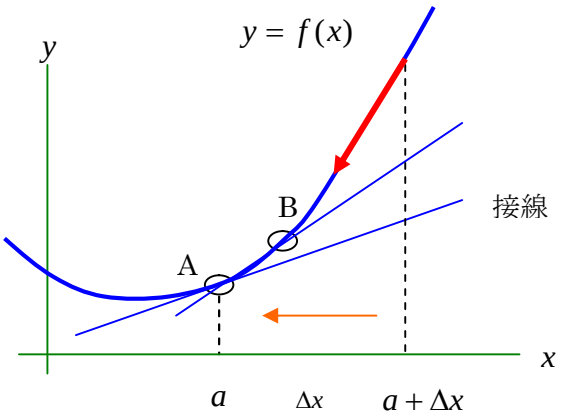


図 37

いい方を変えると、この式は関数$y=f(x)$における$x=a$の微分係数を表していて$x=a$の位置の接線の傾きの大きさは瞬間の変化の大きさを表している、と考えることができます。

整理すると、平均の変化率は**直線の傾き（勾配）**を求めること、瞬間の変化率は$x=a$の極限で**接線の傾き**を求めることになるのです。

(4) $\sin\theta$ の変化率

いま図 38 と 39 において微少角 $\Delta\theta$ が変化したとき $\dfrac{\Delta\sin\theta}{\Delta\theta}=\cos\theta$ になることを調べます。

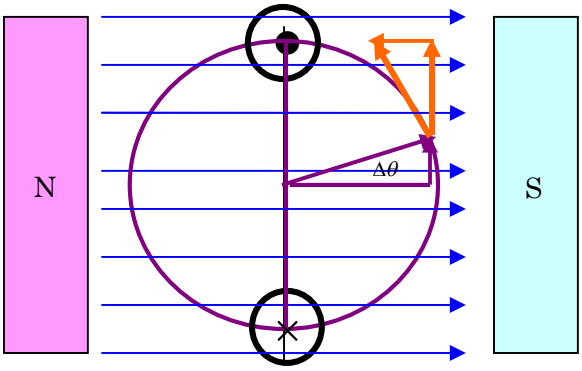


図 38

$\Delta\theta$ の変化は、$\angle\mathrm{boa}=\angle\mathrm{bac}=\theta$ 、$\overline{\mathrm{ab}}=\Delta\theta$ 、$\overline{\mathrm{ac}}=\overline{\mathrm{ab}}\cdot\cos\theta=\Delta\theta\cdot\cos\theta$ から、

$\dfrac{\Delta\sin\theta}{\Delta\theta}$ は、$\dfrac{\Delta\sin\theta}{\Delta\theta}=\dfrac{\overline{\mathrm{ac}}}{\Delta\theta}=\dfrac{\cancel{\Delta\theta}\cdot\cos\theta}{\cancel{\Delta\theta}}=\cos\theta$

従って、$\sin\theta$ の微少角 $\Delta\theta$ は $\cos\theta$ になるのです。

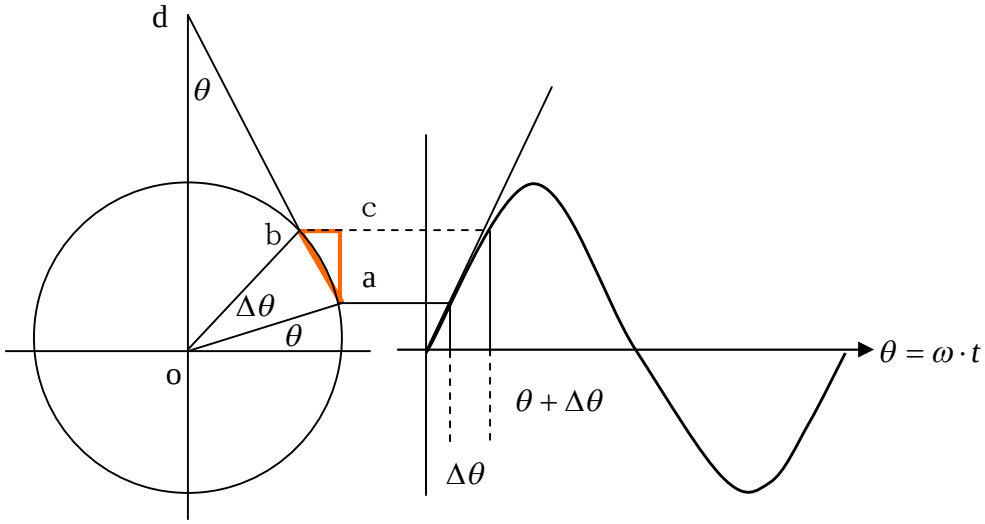


図 39

最大変化率は $\cos\theta$ の θ が 0° のときに 1 で最大だから、$\dfrac{\Delta\sin\theta}{\Delta\theta}$ の最大変化率は、$\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ のとき、1 になる説明です。いま $y=\sin\theta$ の変化率は図 38 の発電

機モデルの動径速度の垂直成分が$\cos\theta$になると考えても差し支えないのです。

次に、電流の変化が$i = \mathrm{I_m}\sin\omega\cdot t$としたときの$\sin\omega\cdot t$の変化率$\dfrac{\Delta\sin\omega\cdot t}{\Delta t}$を考えます。$\dfrac{\Delta\sin\omega\cdot t}{\Delta t}$は、$\dfrac{\Delta\sin\omega\cdot t}{\Delta t} = \dfrac{\omega}{\omega}\cdot\dfrac{\Delta\sin\omega\cdot t}{\Delta t} = \omega\cdot\left(\dfrac{\Delta\sin\omega\cdot t}{\omega\cdot\Delta t}\right)$と表すことができますから、時間$t$に対する変化率は$\omega\cdot\cos\omega\cdot t$になります。

$\omega\cdot\cos\omega\cdot t$は、$\omega\cdot t = 0$のとき最大の１になることから説明できます。

(5) インダクタンスL〔H〕に流れる電流が微少変化したとき

インダクタンス（L〔H〕）に流れる交流の電流i〔A〕（$i = \sqrt{2}\mathrm{I}\sin\omega\cdot t$）が微少増加したとき、$i$〔A〕の増分を考えます。ここで角速度$\omega$と$\theta$の関係は、$\theta = \omega\cdot t$です。

$$\Delta i = \sqrt{2}\mathrm{I}\sin\omega(t+\Delta t) - \sqrt{2}\mathrm{I}\sin\omega\cdot t$$

この式は電流の増分を表す式ですが整理すると次式のようになります。

$$\Delta i = \sqrt{2}\mathrm{I}\sin\omega(t+\Delta t) - \sqrt{2}\mathrm{I}\sin\omega\cdot t = \sqrt{2}\mathrm{I}\{\sin(\omega\cdot t+\omega\cdot\Delta t) - \sin\omega\cdot t\}$$

式を展開して、$\Delta i = \sqrt{2}\mathrm{I}(\sin\omega\cdot t\cdot\cos\omega\cdot\Delta t + \cos\omega\cdot t\cdot\sin\omega\cdot\Delta t - \sin\omega\cdot t)$とします。

ここで電流増加の時間Δtを十分に小さくしたとき、$\cos\omega\cdot\Delta t$の項は、$\omega\cdot\Delta t \cong 0°$、$\sin\omega\cdot\Delta t$の項は$\sin\omega\cdot\Delta t \cong \omega\cdot\Delta t$になります。この関係を電流の増分の式に代入すると次式を得ます。

$$\Delta i = \sqrt{2}\cdot\mathrm{I}\{\sin\omega\cdot t + \omega\cdot\Delta t\cdot\cos\omega\cdot t - \sin\omega\cdot t\} = \sqrt{2}\cdot\mathrm{I}\cdot\omega\cdot\Delta t\cdot\cos\omega\cdot t$$

更に時間的な変化率をとると次式のように表せます。

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \sqrt{2}\cdot\mathrm{I}\cdot\omega\cdot\cos\omega\cdot t = \sqrt{2}\cdot\mathrm{I}\cdot\omega\cdot\sin\left(\omega\cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

この式はインダクタンスの中で発生する起電力を示しています。

$$e = \mathrm{L}\times\frac{\Delta i}{\Delta t} = \sqrt{2}\cdot\mathrm{I}\cdot\omega\mathrm{L}\cdot\sin\left(\omega\cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\ 〔\mathrm{V}〕$$

従って、起電力は電流より$\dfrac{\pi}{2}$位相が進んでいることを示しています。

インダクタンスを持つ回路に電流増分があれば、電源に対抗する向きの起電力が現れ、減少するときは電源と同一方向の向きに起電力を発生させ、流れる電流に対して、起電力は90°進み、電流は逆に90°遅れて流れ、物理現象に対応いることになります。

【まとめ】

インダクタンス L〔H〕に sin 変化する電流が流れると起電力 e は、$\omega \cdot \mathrm{I}_m$ を最大値として cos 変化し、電流に対して位相は 90°位相が進みます。

(6) 平均の変化率の計算

$y = f(x)$ において、$f(x) = x^2 - 3x + 7$ とするとき $x = 2$ から $x = 5$ までの平均の変化率を求めてみます。

$$f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 7 = 5$$

$$f(5) = 5^2 - 3 \cdot 2 + 7 = 26$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5)^2 - f(2)}{5-2} = \frac{26-5}{5-2} = \frac{21}{3} = 7$$

(7) 微分係数を求める計算

$y = f(x)$ で $f(x) = x^2$ の $x = 1$ における微分係数を求める。

平均の変化率は、$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(1+\Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x}$ だから、微分係数 $y' \mid x = 1$ は $\Delta x \to 0$ としたときの極限値だから、次のようになります。

$$y' \mid_{x=1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2$$

(8) 瞬間の変化率（接線の傾き）を求める計算

$y = f(x)$ で、$f(x) = x^2 - 2x$ のとき $x = 3$ における接線の傾きを求めます。

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{(3+\Delta x)^2 - 2(3+\Delta x)\} - \{3^2 - 2 \cdot 3\}}{\Delta x}$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4$$

第５章　交流の表示

発電機で発電した電気の表示には、瞬間的な値を示す瞬時値、実効値、平均値の３つの方法があります。実効値とはどんな値でしょう？　平均値とはどんな値でしょうか。瞬時値とはどんな値でしょうか。私たちの知る喜びは絶えませんね。

実効値は交流の電気を直流の電気と等価になるように表す方法です。実際に私たちが扱う電気なので詳しく調べてみましょう。

１．実効値

交流の電気を等しい熱効果のある直流に換算して表す値なのです。図 40 の太線で引いた値が実効値です。この値は電流を i^2 として発電機から負荷に流れる方向だけにしたものになります。

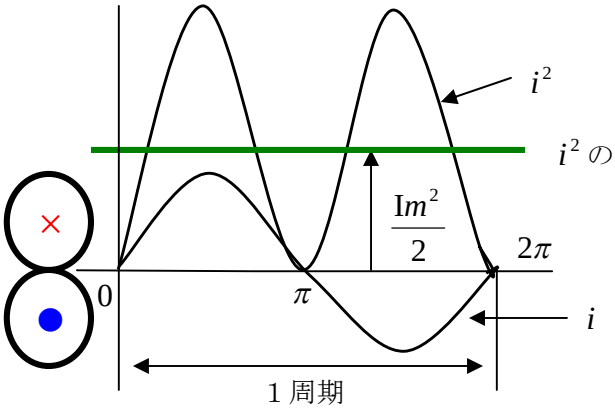


図 40

【どのようにして求めるのか調べましょう】

実効値は、発熱が直流＝交流を考えるもので式は $I^2 \cdot R \cdot t = i^2 \cdot R$ の１周期間の平均 $\times t$〔sec〕と表されるのです。ここで**左辺が直流**で**右辺が交流**になります。

右辺の抵抗 R〔Ω〕は、導体断面積と長さの比ですから交流も直流も同じ熱消費をするので相殺されて電流の瞬時値の 2 乗の１周期間の平均の平方根になるのです。では瞬時の電流から実際に調べてみましょう。計算は、三角関数を含んだ周期関数をオームの法則を使って行うものです。

まず瞬時値の電流を 2 乗し $i^2 = I_m{}^2 \sin^2\theta$〔A〕とします。（ここで I_m のサフィックスは最大（max）を意味する記号です。）

この式の $\sin^2\theta$ を半角の式に変換して、$\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\theta}{2}$ とします。

この式を上式に代入し実数項と周期項に分離したのが次式です。

$$i^2 = I_m{}^2 \cdot \sin^2\theta = \frac{I_m{}^2}{2}(1-\cos^2\theta) = \frac{I_m{}^2}{2} - \frac{I_m{}^2}{2} \cdot \cos 2\theta$$

この計算の詳細は次の関係を使って表しています。電流式の$\sin^2\theta$は、実数部分と周期成分に分解しないと答えを導くことはできないので、三角関数のかけ算からたし算の形に変換（積→和）して計算をします。

つまり、$\sin A \times \sin B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$｜だから、B=Aとおいて次式とするのです。$\frac{1}{2}\{\cos(A-A)-\cos(A+A)\}=\frac{1}{2}\{\cos(0)-\cos(2A)\}$

ここで、cosA=0 とすると、cosA の項は 1 になるので、実数項と周期項に分離でき、$\sin A \times \sin A = \frac{1}{2}-\frac{\cos 2A}{2}$と表すことができます。この式を元の式に代入すると次式のように置き換えることができます。

$$i^2 = I_m{}^2 \cdot \sin^2\theta t = \frac{I_m{}^2}{2}\cdot(1-\cos\theta) = \frac{I_m{}^2}{2} - \frac{I_m{}^2 \cdot \cos 2\theta}{2}$$

式の右辺第 2 項の 2 倍の$\cos\theta$は、1 周期間に 2 倍の速さで電源と負荷との間を行ったりきたりする周期成分のため、電力としては全く現れない項です。

例えると、常に電源と負荷との間を行ったり来たりして電力の授受を行わないので 0 とするのです。そうすると実数項だけが残りますから、実効値は瞬時値の最大値を 0.707 倍したものが実効値であることが分かります。

$$i^2 \text{は、} I = \sqrt{\frac{I_m{}^2}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 \times I_m$$

私たちが日常生活に使っている 100〔V〕の交流はテスターで調べると 100〔V〕を示しますので、実効値を示す計器ということが分かりますね。

瞬時値を計測するには、オッシロスコープ等で行いますが、このときの値は 141〔V〕です。

２．平均値

交流の電気の平均値は 1 周期の半分、即ち、半周期から求めます。

図 41 に示したように交流の電気は前の半波（0 からπ〔rad〕）では負荷側に流れますが、あとの半波（π〔rad〕から2π〔rad〕）では負荷側から電源側に流れ平均すると 0 になるので数学的な答えは導けません。

したがって、平均値を求めるときは0からπの間で計算をします。勿論、前の半周期とあとの半周期の波の形は同じであることが前提条件です。すると平均値は図 41 に示すように電流i〔A〕の半波を 0 からπ〔rad〕の間の波形のn等分し逐次たし算を行い、分割数で割るといった方法で求まることが分かります。

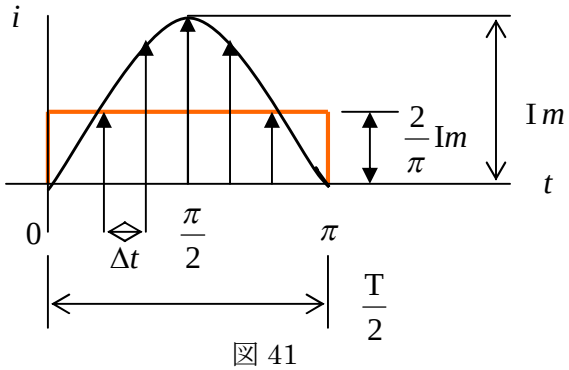


図 41

(1) 平均値の計算

平均値＝$\dfrac{i_1+i_2+i_3+\cdots+i_n}{n}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} i_k$ （分割数を増せば精度が上がります。）

n は区分数、i_1-i_n は区分間の電流です。次式は、極限値で式を表したものです。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} i_k = i_{av}(\mathrm{A}) \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot\Delta t}\sum_{k=1}^{n} i_k\cdot\Delta t = i_{av}(\mathrm{A})$$

平均値を求める計算は、分割数 n に関わらず $n\cdot\Delta t=\dfrac{\mathrm{T}}{2}$ になりますから、区分した流の総てをたし算した数を区分数で割ってやれば平均値を求める式ができるのです。いま上式を「$\dfrac{1}{\frac{\mathrm{T}}{2}}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} i_k\cdot\Delta t = i_{av}(\mathrm{A})$」としたとき、$i_k\cdot\Delta t$ の意味は図 41 の短冊（矩形）の 1 つの面積になり、$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} i_k\cdot\Delta t=\dfrac{\mathrm{S}}{\frac{\mathrm{T}}{2}}=i_{av}(\mathrm{A})$ の式で表されます。この短冊は無限に細かく区分することができるため、究極のところ曲線と時間軸で囲む面積が平均値になるのです。

(2) 計算

$i=\mathrm{I}_m\cdot\sin\omega\cdot t$ 〔A〕の周期関数から平均値を求めてみます。T を一周期（0～π〔rad〕: 180°）、$\dfrac{\mathrm{T}}{2}$ を $\dfrac{1}{4}$ 周期〔$\dfrac{\pi}{2}$〕: 90°）とおいて、電流の平均値を $\mathrm{I}_{\mathrm{mean}}$（$mean$ は平均の記号）とすると半周期間を無限に区切ったひとつひとつの短冊のたし算、即ち、面積を求める作業になります。この計算は少し難しくなりますが、積分という計算方法で求めるのです。

$$\mathrm{I}_{av} = \frac{1}{\frac{\mathrm{T}}{2}}\int_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}} i \cdot dt = \frac{1}{\frac{\mathrm{T}}{2}}\int_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}} \mathrm{I}_m \sin\omega t \cdot dt = \frac{2\mathrm{I}_m}{\mathrm{T}}\int_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}} \sin\omega t.dt$$

上の式は交流の１周期の半分の波の面積を求める計算式です。

式の中の$\int$ の記号は、インテグラルといいます。

この記号は、平面の大きさを求める計算に使用し、*square measure* を縦長にした記号と覚えて下さいね。

$\frac{2\mathrm{I}_m}{\mathrm{T}}\int_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}} \sin\omega t.dt$ の計算では、$\int \sin\omega t \cdot dt$ が $\int \sin kx \cdot dx = -\frac{\cos kx}{k}$ なる不定積分の計算結果の式のみを使って計算をします。

不定積分の名前の由来は計算したあとに必ず変数のない定数が付随するところから呼ばれるもので実際に付随する値が 50 なのか 100 なのか、全く分からないのです。

では、積分結果を使って計算をしましょう。

$$\mathrm{I}_{mean} = \frac{2\mathrm{I}_m}{\mathrm{T}}\left[-\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\cdot\cos\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\cdot t\right]_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}} = \frac{2\mathrm{I}_m}{\mathrm{T}}\left[-\frac{1}{\omega}\cos\omega t\right]_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}}$$

この等式で使用している変数は時間 t〔sec〕です。ここで ω〔rad〕は先に説明した角速度です。

(3) 計算経過と解

$$\mathrm{I}_{mean} = \frac{2\mathrm{I}_m}{\mathrm{T}}\left[-\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\cdot\cos\pi + \frac{\mathrm{T}}{2\pi}\cdot\cos 0\right] = \frac{2\mathrm{I}_m}{\mathrm{T}}\left[-\frac{\mathrm{T}}{2\pi} + \frac{\mathrm{T}}{2\pi}\right] = \frac{2\mathrm{I}_m}{\mathrm{T}}\left[\frac{2\mathrm{T}}{2\pi}\right] = \frac{2\mathrm{I}_m}{\pi}$$

求めた $\frac{2}{\pi}\cdot\mathrm{I}_\mathrm{m}(\mathrm{A})$ が平均値なのです。（ただし π は円周率で 3.1415‥‥です。）

第６章　微分と積分

平均の変化率や瞬間の変化率について説明をしましたが、物理現象を考えて行くと四則計算や三角関数、指数や対数のみでは足りなくなり、新しい計算方法を学習する必要がでてきます。特に、私たちが職場で経験するスイッチの入切時の電流、電圧の変化などを計算に依って求めようとすると、中学校教育だけの数学では求めることができません。少し難しくなりますが、この章では微分や積分の考え方を学習します。

１．微分

第５章で学習した平均の変化率は、曲線の AB 点を直線で結んだ時の傾きの計算、瞬間の変化率は、曲線に接する接線の傾きを瞬間の変化の度合いの大きさとして求める計算でした。瞬間の変化率を求める計算には微分係数と導関数の二つあって、互いに変化率を求める上では類似はしていましたが、一方が定数（既に定まった値）を扱うことに対して、他方の導関数は変数を扱う意味で全く異なるものでした。

これらの計算式は $\dfrac{\{f(a+\Delta x)-f(a)\}}{\Delta x}$ で表され、微少変化 Δx を 0 に近づけていくと、この式の値は極限値に到達するもので、このとき a における、$f(x)$ の微分係数といい、$x=a$ で微分ができるとしてきました。

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

これらと微分の関係を整理すると次のようになります。

○ $f'(a)$ を $f(x)$ の $x=a$ として計算するのが微分係数（定数の計算）

○ 微分係数の定数 a を変数 x にしてから計算するのが導関数（x を残す計算）

○導関数を求める計算は微分（逆に微分すれば導関数が求まる計算）

(1) 微分の計算をやってみよう

① $y=x^2$ の微分

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x^2+2x\cdot\Delta x+\Delta x^2\right)-x^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\cdot\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2x+\Delta x=2x$$

となります。この計算は次のように一般式を使っても同じ結果になります。

$y=f(x)$ の x^2 の微分は $x^n=n\cdot x^{n-1}$ から次のように計算します。

$$f'=\frac{dy}{dx}=2x^{2-1}=2x$$

このように x^2 の微分は、$2x$ になるのです。いま変数の値が $x=3$ のとき、解の変数 x に 3 を代入すると、変化率の大きさは 6 になります。

今度は、$f(x)=3x$ を計算してみます。これも $f'=n\cdot x^{n-1}$ を使って計算します。

ところが、$1\cdot 3x^{1-1}=1\cdot 3x^0=3$ になります。指数で説明したように x^0 は 1 にと

るから、$f(x)=3$ は $3\cdot x^0$ になり、これを $f'=nx^{n-1}$ で計算すると、$f'=0\times 3^{0-1}=0\times 3^{-1}$ になります。この計算は、平均の変化率でも説明したように定数は傾きがないので微分の結果当然 0 になることを示したものになっています。（定数の概念図を図 42 に示しました。）

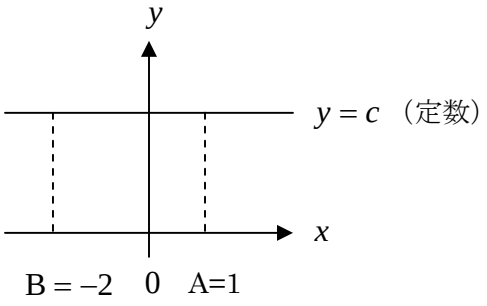


図 42

(2) 微分の計算上の約束

① 係数の微分：$\{k\cdot f(x)\}'=k\cdot f'(x)$

② たし算（和）とひき算（差）の微分

・$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

・$\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

③ かけ算（積）の微分

・$\{f(x)\cdot g(x)\}'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

④ わり算（商）の微分

・$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

(3) 関数の関数の微分

① $y=(x^3+3)^2$ の微分

$y=(x^3+3)^2$ の右辺を $z=x^3+3$ とおいて $y=z^2$ とする陰関数とします。

この式は、$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta z}\times\dfrac{\Delta z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\times\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta x}$ のように Δx が極限値をとるとき、Δz が Δx の関数としているために同じように極限値をとることになり、従って $\Delta x\to 0$、$\Delta z\to 0$ として、式を書き改めたのが次式です。

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

この極限値の式を関数の関数の微分といって次のように表します。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx}$$

では、$y = \left(x^3 + 3\right)^2$ の微分計算をやってみましょう。

それぞれの関数で微分したものは $\frac{dy}{dz} = 2z$ 、$\frac{dz}{dx} = 3x^2$ です。

これを上式に代入して解を求めます。

$$\frac{dy}{dx} = 2z \cdot \left(3x^2\right) = 2\left(x^2 + 3\right) \cdot 3x^2 = 6x^2\left(x^3 + 3\right)$$

② 陰関数の微分

次に $x^2 + y^2 = 1$ を x で微分する計算をやってみます。

$x^2 + y^2 = 1$ を２乗して x の項を移項し y の関数式を作ります。

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

次に $x^2 + y^2 = 1$ を x で微分すると $2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ です。この式は $y \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ が成立しますので、y の項に $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ を代入して、その結果である $x^2 + y^2 = 1$ を微分すると、$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\pm\sqrt{1 - x^2}} = \mp\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ となって、陰関数のままでも微分できるということが分かります。

(4) 三角関数の微分をやってみよう

電気の現象を時系列で調べるとき道具として活躍するのが三角関数です。そして三角関数の微分は大変大きな力を発揮しますので、紹介します。

① $\sin\theta$ を微分します。

$$\frac{d\sin\theta}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin\theta}{\Delta\theta}$$

右辺、$\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin\theta$ を $\sin \mathrm{A} - \sin \mathrm{B} = 2\cos\frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}}{2} \cdot \sin\frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}}{2}$ を使って、

$\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin\theta = 2\cos\frac{2\theta + \Delta\theta}{2} \cdot \sin\frac{\Delta\theta}{2}$ とすると、

$$\frac{\sin(\theta+\Delta\theta-\sin\theta)}{\Delta\theta}=2\cos\left(\frac{2\theta+\Delta\theta}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta}\right)$$

$$=2\cos\left\{\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\right\}\cdot\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{2\cdot\frac{\Delta\theta}{2}}=\cos\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}$$

になります。ここで、$\Delta\theta\to 0$ とすると右辺は $\cos\theta$ になって平均の変化率や瞬間の変化率と同じ結果になります。

② $\cos\theta$ を微分します。

$$\frac{d\cos\theta}{d\theta}=\frac{d\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{d\theta}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\times(-1)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=-\sin\theta$$

$\cos\theta$ の微分（瞬間の変化率）は－$\sin\theta$ になります。

③ $\tan\theta$ を微分します。

$$\frac{d\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{d\theta}=\frac{(\sin\theta)'\cdot\cos\theta-(\cos\theta)'\cdot\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$\sin\theta$ の微分は $\cos\theta$ 、$\cos\theta$ の微分は $-\sin\theta$ でした。$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$（ピタゴラスの定理）を使うと $\tan\theta$ の微分は次のようになります。

$$=\frac{\cos\theta\cdot\cos\theta-(-\sin\theta)\cdot\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

(5) 指数関数及び対数関数の微分

① 指数関数の微分

$y=e^x$ を微分します。（e は、$e=2.7182818$）

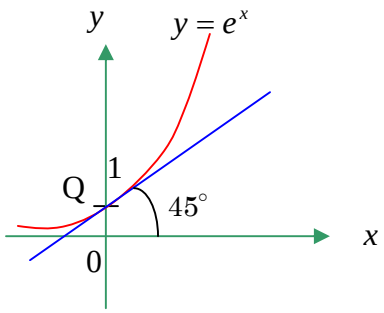


図 43

指数関数が y 軸を切る点Qにおける接線と、x がなす角は 45° です。

点Q $(0,1)$ における $y=e^x$ の微分係数は 45° なので $\tan 45°$ で表すと辺 x も y

も１（斜辺は$\sqrt{2}$）になり、指数関数$y=e^x$を微分することは瞬間の変化率が１になる計算をすればよいことになります。

したがって、$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{0+\Delta x}-e^0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1$　$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}e^x\cdot\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x=\lim_{\Delta x\to 0}e^x\cdot\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x+0$$

以上から、$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$ということになります。

（別法）

まず両辺の対数をとって$\log y=\log e^x$として計算する方法

左辺のyは、xの関数のため合成関数の微分（関数の関数の微分）を使うと、右辺は、$\log e^x=x\cdot\log e=x$（ただし、底が自然対数のとき$\log_e e=1$）になります。この関係から、左辺は$\frac{1}{y}\times y'=1$になり、これを変形して$y'=y$と置きます。

このy'は、$\frac{dy}{dx}$のことですから、$y=e^x$の微分（$y'=\frac{d}{dx}e^x$）は、e^xになるという計算です。

② 対数関数の微分

$y=f(x)$の関数の両辺を微分（$y'=f'(x)$）します。

ただし、計算にさきがけて右辺を$x=g(y)$に置き換え$y'=g'(y)$とします。そうするとこの計算式は$1=g'(y)\cdot\frac{dy}{dx}$ですから、左辺を関数$y$を$x$で微分する式（$\frac{dy}{dx}$）に整理し$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{g'(y)}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$とします。

この計算式の特徴は自然対数を使った対数関数（$y=\log_e x$）を指数の形（$x=e^y$）に表記しなおして微分することにあります。

また、元の対数関数で表すと$\frac{dx}{dy}=e^y$になり、$\frac{d}{dx}\log_e x=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$なので、

$\frac{d}{dx}\log_e x=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}$であるので対数関数の微分も$\frac{d(\log_e x)}{dx}=\frac{1}{x}$になります。

【休憩】

$y = f(x)$ の微分を表すとき記号には 2 種類あります。一つは、ライプニッツの表記法で $\dfrac{dy}{dx}$ 、二つ目は、y' と書いてニュートン系の表記方法といいます。

2．積分

積分と聞いてもうだめと思わないで下さいね。スラスラ計算ができなくても大丈夫なので、安心してください。積分の計算は、微分の逆の計算をすることなのです。そして、計算の意義は面積を求めることなのです。その証拠に S（*square measure*）を縦長にしたような記号インテグラル（$\int$ ）を使って計算式を表現しています。

積分には大きく分けて不定積分と定積分の 2 種類があります。まず一般式の微分 $y' = n \cdot x^{n-1}$ を思い出してください。いま $y = 5x$ の微分は $y' = 1 \cdot 5x^{1-1} = 1 \cdot 5x^0 = 5$ でしたが今度は積分を行います。ここで 5 は指数のところで学習したように $5 = 1 \times 5 \cdot x^0$ なので、微分すると 5 になりましたね。

積分の計算は、次のような計算をするのです。

$$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

いま、$y = 5 \cdot x$ の微分の結果は $y' = 1 \cdot 5 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot 5 \cdot x^0 = 5$ になりますが、この結果を逆に積分すると $\int 5 \cdot dx = \dfrac{1}{1+0} \cdot 5 \cdot x^{0+1} = \dfrac{1}{1} \cdot 5 \cdot x^1 = 5 \cdot x + c$ になります。

～なんと積分すると微分する前の式に戻っているではないですか！～

微分の逆が積分になることがおわかりいただけたことと思います。

$\int f(x)dx + c$ を微分すると $y = f(x)$ になるのです。

(1) 不定積分

不定積分の不定の意味は計算したあとに特定できない定数が付随するところから呼ばれています。この定数の記号には、c や k を使いますが、これは同じもので積分定数なのです。それでは、いろいろな不定積分をやって見ましょう。

① 指数の積分

$$\int x^3 dx$$

この計算は、$\int x^3 \cdot dx = \dfrac{1}{3+1} \cdot x^{3+1} = \dfrac{1}{4} \cdot x^4 + c$ です。「c」は積分定数です。

$$\int \frac{3}{x^4} \cdot dx$$

$$\int \frac{3}{x^4} \cdot dx = 3\int \frac{1}{x^4} \cdot dx = 3\int x^{-4} \cdot dx = \frac{3}{-4+1} \cdot x^{-4+1} + c$$

$$= -\frac{3}{3} x^{-3} + c = -\frac{1}{x^3} + c$$

② 関数 x の積分

$$\int x \cdot dx$$

$$\int x \cdot dx = \frac{1}{1+1} \cdot x^{1+1} = \frac{1}{2} \cdot x^2 + c$$

③ 積分の微分は元の関数

$$\frac{d\left\{\int f(x)dx\right\}}{dx} = f(x)$$

④ 係数のある関数の積分

$$\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$$

⑤ 異なる関数の和（たし算）の積分

$$\int \{f(x) \pm g(x)\} = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

⑥ 関数の積（かけ算）の積分

$$\int x \cdot (x-a)dx$$

$$\int (x^2 - ax)dx = \int x^2 \cdot dx - a\int x \cdot dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + c$$

⑦ 無理数を含んだ積分

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} \cdot dx = \int \frac{\left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} + 1\right)}{\sqrt{x}} \cdot dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right) dx = \int x^{\frac{1}{2}} \cdot dx + \int x^{-\frac{1}{2}} \cdot dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot x^{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{\frac{-1}{2}+1} \cdot x^{-\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x}(x+3) + c$$

⑧　三角関数の不定積分

・$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + c$

・$\int \cos x \cdot dx = \sin x + c$

・$\int \frac{1}{\cos^2} dx = \tan x + c$

・$\int \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) dt = \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)' = \left\{\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)\right\} \times 2$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)\right] + c = \frac{1}{2}\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) + c$$

・$\int \sin^2\theta \cdot d\theta$

三角関数の積→和の変換「$\sin^2\theta = 2\sin^2\theta \cdot \cos\theta$」から求めた半角の公式を使って積分をします！

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\int\left(\frac{1 - 2\theta}{2}\right) \cdot d\theta = \int \frac{1}{2} \cdot d\theta - \int \frac{1}{2} \cdot \cos 2\theta \cdot d\theta = \frac{1}{2} \cdot \theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + c$$

・$\int \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta$

三角関数の積（かけ算）の積分

$z = \cos\theta$ とおくと $\frac{dz(\theta)}{d\theta} = -\sin\theta$ 、 $d\theta = -\frac{1}{\sin\theta} dz$

$$\int \sin\theta \cdot z^3$$

$$\int \sin\theta \cdot z^3\left(-\frac{1}{\sin\theta}\right) \cdot dz = -\int z^3 \cdot dz = -\frac{1}{4} + c = -\frac{1}{4} \cdot \cos^4 + \theta$$

⑨　置換積分

・$\int \sin mx \cdot dx$

$m \cdot x = t$ とおいて、$m \cdot \frac{dx}{dt} = 1$ のため、$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}$ から、$dx = \frac{1}{m} \cdot dt$

$$\int \sin mx \cdot dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{m} \cdot dt = \frac{1}{m}\int \sin t \cdot dt = -\frac{1}{m}\cos \cdot t + c$$

$m \cdot x = t$ としたため、t に mx を代入して次式を作ったのです。

$$\int \sin mx \cdot dt = -\frac{\cos mx}{m} + c$$

⑩　指数と対数の積分

・$\int e^x dx$

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \qquad (e^x)' = e^x$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

・$\int \frac{1}{x} dx$

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \int \frac{1}{x} \cdot dx = \log|x| + c$$

$|x|$ とするわけ　　$x \geq 0$ のとき $|x| = x$、$x \leq 0$ のとき $|x| = -x$

(2) 定積分

定積分は、積分後の変数に範囲（領域値）を与えて面積の大きさを求める計算です。図 44 は、正弦波交流を半波整流したときの平均値を求める計算です。

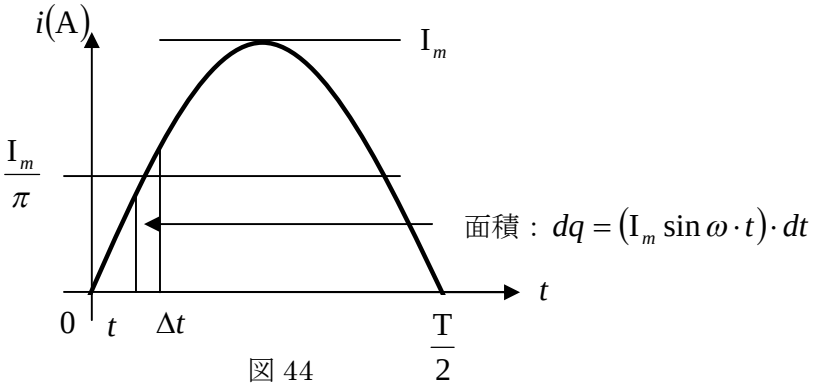


図 44

電流は、$i(t) = I_m \sin \omega \cdot t$（但し、$\omega = 2\pi \cdot f$）

平均電流は 1 周期間に移動した電気量を周期で割ったものです。

時刻 t から微少時間 Δt 秒間に移動した電気量は $q(t) = i \cdot t$〔C〕であるため半周期間の移動量は次式で表せます。

$dq(t) = i(t) \cdot dt = I_m(t) \sin 2\pi \cdot f \cdot t \cdot dt$ から、$q(t) = \int_0^{\frac{T}{2}} i(t) \cdot dt$ のような積分です。

平均電流は次のようになります。

$$\mathrm{I}_{mean} = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}} i(t)\cdot dt = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}} \mathrm{I}_m \cdot \sin 2\pi \cdot ft \cdot dt = \frac{1}{\mathrm{T}}\left[-\frac{\mathrm{I}_m}{2\pi \cdot f}\cos 2\pi \cdot f \cdot t\right]_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}}$$

$$= -\frac{\mathrm{I}_m}{2\pi \cdot f \cdot \mathrm{T}}\left(\cos 2\pi \cdot f \cdot \frac{\mathrm{T}}{2} - \cos\phi\right)$$ となります。

ところが $\mathrm{T} = \frac{1}{f}$、 $f \cdot \mathrm{T} = 1$ ですから、平均電流は次のようになるのです。

$$\mathrm{I}_{mean} = -\frac{\mathrm{I}_m}{2\pi}\cdot(-4) = \frac{2}{\pi}\cdot \mathrm{I}_m$$

平均値は、交流の半周期の面積を求めたことになっています。

第７章　電気回路の過渡現象

１．過渡現象とは

スイッチが投入されていない状態の電気回路があるとき、突然（なぜか突然なのです。）にスイッチを入れたり、切ったりしたとき、その瞬間を含めて電気回路に流れる電流や電圧の変化を求めるためには、キルヒホッフの法則を使って方程式を立てないと答えは求まりません。一般的には、インダクタンスは変化を妨げる向きに新たな起電力を発生させ現状を維持しようと働き、キャパシタンスは変化が大きいほど積極的に電流を流そうと働くので、このとき短時間ではありますが、大きな電圧が現れたり電流が流れたりします。過渡現象は、電気回路に、突然、状態変化を与えたときの電圧や電流の様（さま）を計算で求めようとする数学なのです。

(1) 過渡現象

① 状態

電気回路に流れる電流や電圧が安定している状態を定常状態（*steady style*）、突然に状態を変えたときの経過状態を過渡現象（*transient phonomena*）といいます。

② 過渡現象

電気回路に働く起電力や回路定数或いは回路の構成要素などのいずれか一つまたは、それらが同時に変化するようなことがあると必ず過渡現象が発生します。

③ 過渡現象を考える

過渡現象を考えるとき、それが電気回路の問題である限り出発点はキルヒホッフの電流に関する連続式や電圧平衡式です。この計算は、交流計算の場合と何等変わるところはありません。また抵抗やインダクタンス、キャパシタンスが混在する集中定数回路では、回路方程式は一般に常微分方程式で表すことになり、その余関数を求めることが過渡現象の解になります。また定常解は、交流回路の計算で求めたもので、数学的には元の微分方程式の特解になるのです。物理的に見ると、過渡現象の解は、系の自由振動（*free oscillation*）に相当し、定常解は強制振動（*forced oscillation*）に相当するのです。

④ 方程式の姿

回路方程式の一般解は特解と余関数のたし算の形で表されます。従って、集中定数回路の過渡現象の解法には、まずキルヒホッフの法則で瞬時電圧や電流について回路方程式を立て、その一般解を求め、その解に初期条件（スイッチを入れたり切ったりする前の状態数：*initial condition*）を代入し一般解に含まれる任意定数（*initial const*）を決定することに帰着します。

⑤ 初期条件

回路の状態が変化する直前の状態を、即ち、$t=-0$ における回路条件を初期条件といいます。初期条件には、第一種と二種があり最初の現象を計算するときの

条件を第一種初期条件といいます。第二種初期条件は、過渡現象がおさまった後に再度過渡状態を作って計算するときに使用する条件です。第二種初期条件はコンデンサに蓄積した電荷を放電するときやコイルに蓄積した磁気エネルギを放出するときの状態を求める時に適用します。

⑥　インダクタンス（L〔H〕）がある電気回路の過渡現象

インダクタンスＬ〔H〕が存在する回路は電流の不連続は起こり得ません。
その L(H)には補償電流が流れます。

⑦　キャパシタンス（C〔F〕）がある電気回路の過渡現象

静電容量Ｃ〔F〕がある電気回路では、電圧の不連続は起こり得ないから、それを補償するように C には補償電圧が現れます。

⑧　磁束不変の理

回路状態の変化の直前と直後を通じてその回路に鎖交する磁束総量は不変です。
この法則はＬを含む第２種初期条件の決定に活用されます。

⑨　電荷量不変の法則

回路状態が変化する直前と直後を通じて、その回路に蓄積されている電荷の総量は不変です。この法則はＣを含む回路の第２種初期条件決定に利用されます。

⑩　過渡現象の特徴

電気回路がＲの他にＬ又Ｍ或いはＣの何れか１方しか含まないときは、回路中に蓄積されるエネルギは、磁気エネルギか静電エネルギのいずれか１種類です。（これを単エネルギ回路といいます）。これに対してＬとＣを同時に含む回路を複エネルギ回路といって、単エネルギ回路と区別しています。

(2) 過渡現象は、スイッチの「入」「切」や短絡事故時に現れます

過渡現象の姿は、直流の単エネルギ回路の大きさは、その解が常に指数減衰（非振動）します。ここで解と指数という用語が出てきました。解とは方程式における未知数でしたね。また指数は、自然数eを使いました。過渡現象の計算は、電気回路のスイッチを入れたり切ったりするとき、或いは、事故解析などに使われる計算です。

つまり、アクシデントというイベントが発生したとき、時間とともにどのように経過するか計算によって求めるため、初めから分からない数（未知数）を設定して回路方程式を作り、それを計算によって求めるのです。それでは、ＲやＬ、Ｃが持っている特徴を思い出して進めましょう。まず、電気回路の物理的な現象を整理しておきます。

過渡現象の整理

①　R だけの回路では過渡現象は発生しない
②　L を含む回路では電流の急変は起こらない
③　C を含む回路で電圧の急変は起こらない

④　R と L の直列回路に $t=0$ で E(V)を加えると流れる電流 $i(t)$ は、指数減少する

$$i(t)=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}(1-e^{-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\cdot t})$$

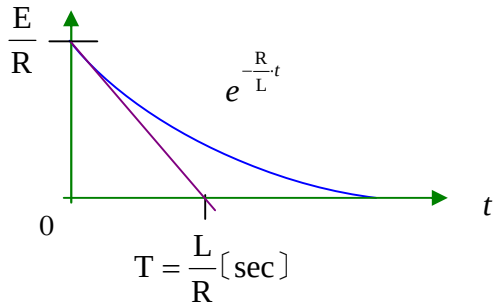
⑤　R と L の直列回路の時定数は $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}$ 〔sec〕です。

⑥　電流が流れている R と L の回路を開放すると次の電流が流れます。

$$i(t)=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}e^{-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\cdot t}=\mathrm{I}\cdot e^{-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\cdot t}\ 〔\mathrm{A}〕$$

この電流は次のような形で減衰します。指数減衰する原因はインダクタンスの中に磁力線として蓄えられていたエネルギがスイッチを切ると放出するためです。

定常回路では電源スイッチを切ると、直ちに 0〔V〕になるとしていましたが、過渡回路では、電源スイッチを切っても T 秒間流れることが分かります。



⑦　CR 直列回路で、$t=0$ において直流起電力 E〔V〕を加えたとき、電荷 $q(t)$ と電流 $i(t)$ は次のようになります。

$$q(t)=\mathrm{C}\cdot\mathrm{E}(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{C}\cdot\mathrm{R}}\cdot t})\ 〔\mathrm{C}〕、\ i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}e^{-\frac{1}{\mathrm{C}\cdot\mathrm{R}}\cdot t}\ 〔\mathrm{A}〕$$

⑧　ここで T は、$\mathrm{T}=\mathrm{C}\cdot\mathrm{R}$ 〔sec〕と表し、現象が収束する時間（時定数）です。

⑨　電荷 q_1〔C〕を持っている C と R を通じて、放電する時の電荷と電流は、次のようになります。

$$q(t)=q_1\cdot e^{-\frac{1}{\mathrm{C}\cdot\mathrm{R}}\cdot t}、\ i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=-\frac{1}{\mathrm{CR}}q_1\cdot e^{-\frac{1}{\mathrm{C}\cdot\mathrm{R}}\cdot t}\ 〔\mathrm{A}〕$$

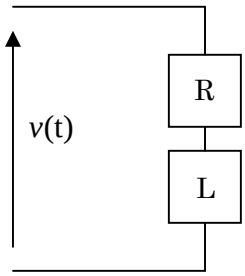
⑩　L と R の直並列回路や C と R の直並列回路に直流の起電力を加えたときの各枝回路に現れる過度電流は、連立微分方程式を立てて求めます。

２．直流の単複エネルギ直列回路の特徴

回路図から方程式を作って特徴を求めます。

作る方程式は直列回路ですから、電圧に関して立てればよいのです。

(1) RL 回路



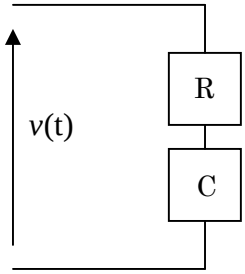
回路方程式（直列：電圧式）

$v_{\mathrm{R}}(t)$　　$v_{\mathrm{R}}(t) = \mathrm{R}i(t)$

$v_{\mathrm{L}}(t)$　　$v_{\mathrm{L}}(t) = \mathrm{L}\dfrac{di(t)}{dt}$

$$v(t) = \mathrm{R}i(t) + \mathrm{L}\frac{di(t)}{dt}$$

(2) RC 回路



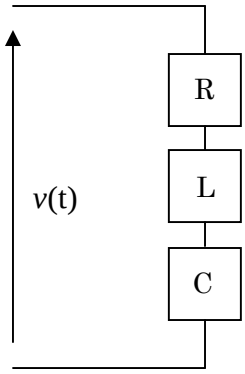
回路方程式（直列：電圧式）

$v_{\mathrm{R}}(t)$　　$v_{\mathrm{R}}(t) = \mathrm{R}i(t)$

$v_{\mathrm{c}}(t)$　　$v_{\mathrm{c}}(t) = \dfrac{1}{\mathrm{C}}\displaystyle\int i(t)dt$

$$v(t) = \mathrm{R}i(t) + \frac{1}{\mathrm{C}}\int i(t)\cdot dt$$

(3) 直流複エネルギ回路の特徴



回路方程式（直列：電圧式）

$v_{\mathrm{R}}(t)$　　$v_{\mathrm{R}}(t) = \mathrm{R}i(t)$

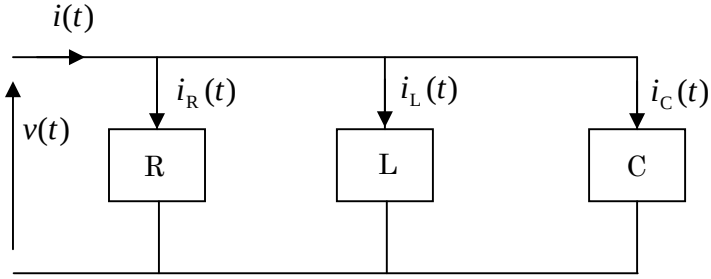
$v_{\mathrm{L}}(t)$　　$v_{\mathrm{L}}(t) = \mathrm{L}\dfrac{di(t)}{dt}$

$v_{\mathrm{c}}(t)$　　$v_{\mathrm{c}}(t) = \dfrac{1}{\mathrm{C}}\displaystyle\int i(t)dt$

$$v(t) = \mathrm{R}i(t) + \mathrm{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{\mathrm{C}}\int i(t)dt$$

３．直流単複エネルギ並列回路の特徴

並列回路図から方程式を作りましょう。作る方程式は並列回路ですから電流に関する方程式です。ここでは複エネルギの並列回路で説明します。



$$i(t) = i_{\mathrm{R}}(t) + i_{\mathrm{L}}(t) + i_{\mathrm{C}}(t)$$

$$i_{\mathrm{R}}(t) = \frac{1}{\mathrm{R}} v(t) \qquad i_{\mathrm{L}}(t) = \frac{1}{\mathrm{L}} \int v(t) dt \qquad i_{\mathrm{C}}(t) = \mathrm{C} \frac{dv(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{\mathrm{R}} v(t) + \frac{1}{\mathrm{L}} \int v(t) + \mathrm{C} \frac{dv(t)}{dt}$$

電気工学入門で学習したように電気で使用する数理や数はその殆どが物理現象と一体付けられるものですから、現象面の理解は、回路計算に直接必要になります。
電気現象を数理に表し計算できることは設計上有用だけでなく品質を保つ意味でも非常に役立ちますから学習を積み重ね自分のものにして下さい。

4．微分方程式の計算

(1) 一階定数係数微分方程式とは

$\mathrm{L} \cdot \dfrac{di(t)}{dt} + \mathrm{R} \cdot i(t) = \mathrm{E(t)}$ は電圧に関する方程式です。この方程式は微分方程式と比べると、次に示す一階の定数係数微分方程式が当てはまります。

$$a \cdot \frac{dy}{dt} + b \cdot y = f(t)$$

一階定数係数微分方程式は定数を含む一次の微分式からでき上がった等式をいいます。では早速 $f(t) = 0$ のときを計算して見ましょう。

$a \cdot \dfrac{dy}{dt} = -b \cdot y$　この式の両辺に $\dfrac{1}{a}$ をかけて、$\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{b}{a} \cdot y$ として、次に、変数を左右に分離し次式のような積分式で表す等式を作ります。

$$\frac{1}{y} \cdot dy = -\frac{b}{a} \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y} \cdot dy = -\frac{b}{a} \int dt$$

これを積分すると、$\log_e y = -\dfrac{b}{a} \cdot t + \mathrm{K}_0$　になります。ここで、K_0 は、不定積分の積分定数です。この積分結果は、微分積分の章で $\dfrac{1}{y}$ の積分が $\log_e y$、$1\,dt$ の積分が t、になったことを使って表したものです。

次に、$\log_e y = -\dfrac{b}{a} \cdot t + \mathrm{K}_0$ の両辺を指数で表します。

対数と指数の関係は、互いに逆の関係にありましたので、両辺の指数をとると y のを原始関数（元の関数）で表す式になるのです。指数で約束したように指数のたし算は次式に示すように指数どうしのかけ算ですから書き改めて次のようにします。

$$y = e^{-\frac{b}{a}\cdot t + \mathrm{K}_0} = e^{-\frac{b}{a}\cdot t} e^{\mathrm{K}_0}$$

ここで、$e^{\mathrm{K}_0} \equiv \mathrm{K}$ と置いて、$y = \mathrm{K}\cdot e^{-\frac{b}{a}\cdot t}$ とすると現象を説明する方程式の答え（一般解）が求まるのです。

ここで「解」について

電気回路に使う微分方程式の未知数には二つあって、ひとつは定常解、もうひとつは過渡解があります。一般数学では、定数係数微分方程式の解を特解と補助解に分けて求めますが、電気回路では、現象がおさまった後の定常解と過渡現象の過程を示す過渡解に分け、特解は定常解に補助解は過渡解に対応するのです。

積分定数 K は、方程式に初期条件を与えると求まる数で、過渡現象が発生する直前の物理量を第一種初期条件、そして次の状態に移るときの物理量を表わすのに第二種の初期条件と呼んでいます。

① $f(t) = \mathrm{E}$（直流）のとき、次式の一階定数係数微分方程式を計算します。

$$a\cdot\frac{dy}{dt} + b\cdot y = \mathrm{E}$$ （一階定数係数微分方程式）

左辺の第２項を右辺に移行し、$a\frac{dy}{dt} = -by + \mathrm{E}$ として、両辺を $\frac{1}{a}$ 倍して、

$\frac{dy}{dt} = -\frac{b}{a}y + \frac{\mathrm{E}}{a}$ とします。次に右辺を $\frac{b}{a}$ でまとめ $\frac{dy}{dt} = -\frac{b}{a}(y - \frac{\mathrm{E}}{b})$ とします。

ここで、変数を分離して次のような式に変形して積分の等式を作ります。

$$\int\frac{dy}{(y - \frac{\mathrm{E}}{b})} = -\int\frac{b}{a}\cdot dt$$

両辺を積分すると、$\log_e(y - \frac{\mathrm{E}}{b}) = -\frac{b}{a}\cdot t + \mathrm{K}_0$ が得られます。今度は両辺を指数で表し、指数の約束に従って整理すると次式になります。

$(y - \frac{\mathrm{E}}{b}) = e^{-\frac{b}{a}\cdot t}\cdot e^{\mathrm{K}_0}$　ここで $e^{\mathrm{K}_0} \equiv \mathrm{K}$ と置くと、$\mathrm{y} - \frac{\mathrm{E}}{b} = \mathrm{K}\cdot e^{-\frac{b}{a}\cdot t}$ となります。

左辺の $-\frac{\mathrm{E}}{b}$ を右辺に移行して関数 y の形の式にし、得られた次式が方程式の解です。

$$\therefore y = \mathrm{K}\cdot e^{-\frac{b}{a}\cdot t} + \frac{\mathrm{E}}{b}$$ （過渡解＋定常解）

定常解は、電池の起電力、過渡解は過渡現象の収まる過程を表します。

② $f(t)$ が時間関数のときの計算をやってみます

$a\dfrac{dy}{dt}+by=f(t)$ のように右辺に時間関数を持つ方程式です。

この式の両辺に $\dfrac{1}{a}$ 倍し、両辺に $e^{\frac{b}{a}\cdot t}$ をかけると、次式になります。

$$\frac{dy}{dt}e^{\frac{b}{a}\cdot t}+\frac{b}{a}ye^{\frac{b}{a}\cdot t}=\frac{1}{a}f(t)\cdot e^{\frac{b}{a}\cdot t}$$

左辺を $\dfrac{d}{dt}\left\{y\cdot e^{\frac{b}{a}\cdot t}\right\}$ と整理し、$\dfrac{d}{dt}\left\{y\cdot e^{\frac{b}{a}\cdot t}\right\}=\dfrac{1}{a}f(t)\cdot e^{\frac{b}{a}\cdot t}$ とします。

積分と微分の関係は逆の関係ですから、積分結果は次式のように左辺を原始関数の y に、右辺は定数係数の積分式に置き変えることができます。

$$y(t)\cdot e^{\frac{b}{a}\cdot t}=\frac{1}{a}\int f(t)\cdot e^{\frac{b}{a}\cdot t}dt+\mathrm{K}$$

ここで両辺を $\dfrac{1}{e^{-\frac{b}{a}\cdot t}}$ と置くと方程式が完成します。この方程式は、定常解と過渡解をもつ項から成り立ちます。

$$\mathrm{y}=\frac{1}{a}\cdot e^{-\frac{b}{a}\cdot t}\int f(t)\cdot e^{\frac{b}{a}\cdot t}dt+\mathrm{K}\cdot e^{-\frac{b}{a}\cdot t}$$ （定常解＋過渡解）

いま、$f(t)=\mathrm{E}\cdot e^{-\frac{1}{\mathrm{T}_0}\cdot t}$ という関数が与えられたときの計算をします。

$$\mathrm{y}=\frac{1}{a}\cdot e^{-\frac{b}{a}\cdot t}\int f(t)\cdot e^{-\frac{1}{\mathrm{T}_0}\cdot t}\cdot e^{\frac{b}{a}\cdot t}dt=\frac{\mathrm{E}}{a}\cdot e^{-\frac{b}{a}\cdot t}\int e^{-\frac{1}{\mathrm{T}_0}\cdot t}\cdot e^{\frac{b}{a}\cdot t}dt=\frac{\mathrm{E}}{a}\cdot e^{-\frac{b}{a}\cdot t}\int e^{(-\frac{1}{\mathrm{T}_0}\cdot t+\frac{b}{a})t}dt$$

$$=\frac{\mathrm{E}}{a}\cdot e^{-\frac{b}{a}\cdot t}\frac{1}{(-\frac{1}{\mathrm{T}_0}+\frac{b}{a})}\cdot e^{(-\frac{1}{\mathrm{T}_0}+\frac{b}{a})t}+\mathrm{K}$$

$$=\frac{\mathrm{E}}{a}\frac{1}{(-\frac{1}{\mathrm{T}_0}+\frac{b}{a})}e^{-\frac{1}{\mathrm{T}_0}\cdot t}+\mathrm{K}=\frac{\mathrm{E}}{-\frac{a}{\mathrm{T}_0}+b}e^{-\frac{1}{\mathrm{T}_0}\cdot t}+\mathrm{K}$$

$$=\frac{\mathrm{T}_0\mathrm{E}}{\frac{b}{\mathrm{T}_0}-a}e^{-\frac{1}{\mathrm{T}_0}\cdot t}+\mathrm{K}=\mathrm{T}_0\mathrm{E}\frac{1}{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{T}_0}-a}e^{-\frac{1}{\mathrm{T}_0}\cdot t}\mathrm{K}\quad(\frac{1}{\mathrm{T}_0}\neq\frac{b}{a})$$

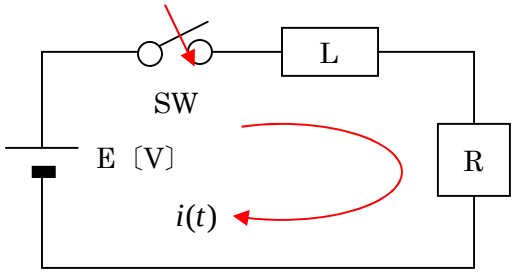
この方程式の解は積分定数Kを$t=0$として計算すると求められます。

5．過渡現象の解析

(1) ＲＬ直流直列回路

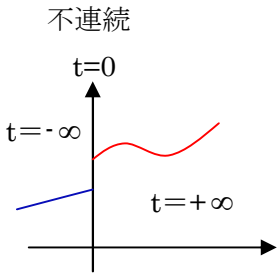
実際の RL 回路を計算します。

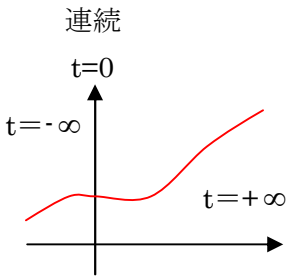
① 未知数の電流と電流が減衰する軌跡を求めます



回路条件は、$t=0$で、SW（スイッチ）を閉じたとき、$t=t$の瞬時の電流$i(\mathrm{A})$を求めます。まず、SW を閉じる前の条件は、$i(\mathrm{A})=(-0)=0$、この回路には直列に L〔H〕を含んでいるため、電流はスイッチを入れた前後において一定（連続）とします。$t=(+0)$でも電流は 0 なので、$t=+0$のとき、$i(+0)=0$と条件付けられます。

ここでいう不連続と連続の関係は次の図のとおりです。





早速、この回路の方程式（等式）を作って計算をします。

上の電気回路は、L（自己インダクタンス）、R（抵抗）、E（電源）から構成する電気回路です。いま SW を入れたときの瞬間の電流を求めてみましょう。

この回路は、直列回路ですから作る方程式は電圧に関するものです。

ここでは、R と L による電圧降下と電源が相等しいと置いた等式が方程式です。

電気回路では流れる電流はどこかでなくなるというものではなく連続ですから、前項で説明した一階の定数係数微分方程式になります。

電圧方程式　$\mathrm{L}\cdot\dfrac{di(t)}{dt}+\mathrm{R}i(t)=\mathrm{E(t)}$

この方程式は自己インダクタンスのため、流れる瞬間の電流の大小は、ファラディ･レンツの法則」による逆起電力が現れますから、瞬間的では電位の差がなくなる

ため電圧降下の要素です。（$\mathrm{e} = \mathrm{L}\dfrac{di(t)}{dt}$ 〔V〕）

この要素を含んだ方程式を一階の定数係数微分方程式といいます。

この方程式の答えを求めるには前項のように微分方程式の計算が必要なのです。

では、微分方程式の計算を続けます。

$$\mathrm{L}\cdot\frac{di}{dt} + \mathrm{R}\cdot i(t) = \mathrm{E}(t)$$

$$\frac{di(t)}{\mathrm{E} - \mathrm{R}\cdot i(t)} = \frac{1}{\mathrm{L}}\cdot dt$$

$$-\frac{1}{\mathrm{R}}\int\frac{-\mathrm{R}\cdot di(t)}{\mathrm{E} - \mathrm{R}\cdot i(t)} = \frac{1}{\mathrm{L}}\int dt$$

$$\log_e \mathrm{E} - \mathrm{R}\cdot i(t) = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\cdot t + \log_e \mathrm{K}$$

$\mathrm{E} - \mathrm{R}\cdot i(t) = e^{-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\cdot t} + \mathrm{K}$、$\mathrm{E} - \mathrm{R}\cdot i(t) = \mathrm{K}\cdot e^{-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\cdot t}$

スイッチを閉じる前は、$i(-0) = 0$、直列に L〔H〕があるので電流は連続で、$t = (+0)$ で、電流は 0 だから、$t = +0$、$i(+0) = 0$ ですから、上の式は次のようになります。

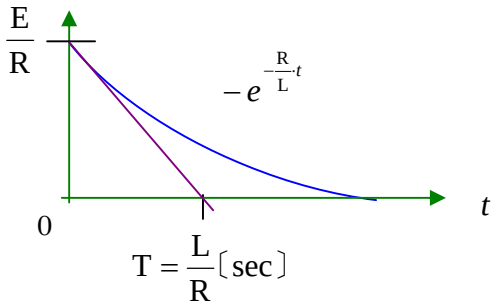
$\mathrm{E} - \mathrm{R}\cdot i(0) = \mathrm{K}\cdot e^{-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\cdot 0}$ から $\mathrm{E} = \mathrm{K}\cdot 1$、$\therefore \mathrm{K} = \mathrm{E}$

$\mathrm{E} - \mathrm{R}\cdot i(t) = \mathrm{E}\cdot e^{-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\cdot t}$ になります。この式の両辺を $\dfrac{1}{\mathrm{R}}$ 倍します。

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}} - i(t) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\cdot e^{-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\cdot t}$$

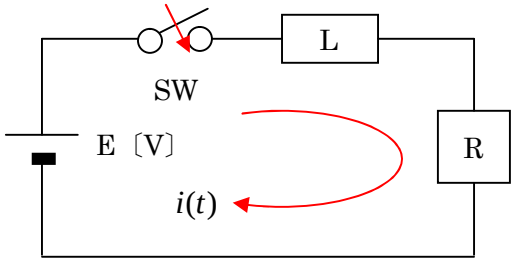
$-i(t) = \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\cdot e^{-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\cdot t} - \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$　　$i(t) = \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}} - \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}e^{-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\cdot t} = \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}(1 - e^{-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\cdot \mathrm{t}})$（定常解と過渡解）

この電流が方程式の解です。次に、方程式の解を使って過渡現象の減衰過程図示します。



② 次に電力を求めてみます。

ＲＬ回路の電力を計算します。



P：電力〔W〕は、$P = P_L + P_R$（L で蓄えられる電力＋R で消費される電力）

電力は、$P = E \cdot I$ ですから、求める電力は $L \cdot \dfrac{di(t)}{dt} \times i(t)$ と $R \times i(t)$ です。

それぞれの電力を $P_L = L \cdot \dfrac{di(t)}{dt} \cdot i(t)$、$P_R = R \cdot i(t)$ とします。

$$i(t) = \frac{E}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}) = I \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t})$$ （ここで $I = \dfrac{E}{R}$）

インダクタンスでは、$W_L = L \cdot \dfrac{di(t)}{dt} \cdot i(t) = I^2 \cdot R \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t})$

抵抗では、$W_R = R \cdot i(t)^2 = I^2 \cdot R \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t})^2$

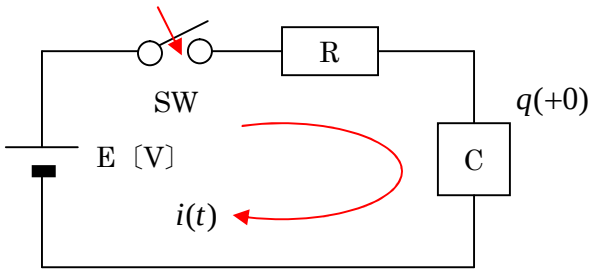
$$P = E \cdot i(t) = P_L + P_R = I^2 R (1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t})$$

$$W_L = \int_0^t P_L \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i(t)^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t})$$

$$W_R = \int_0^t P_R \cdot dt = I^2 \cdot t - L \cdot I^2 (1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}) - \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t})$$

$$W = W_R + W_L = I^2 \cdot R \cdot t - L \cdot I^2 \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t})$$ （熱消費電力＋保存電力）

(2) ＲＣ　直流直列回路



$$\frac{1}{\mathrm{C}}q(t)+\mathrm{R}\cdot i(t)=\mathrm{E}$$

ただし、$i(t)=\dfrac{d(t)}{dt}$ なので、$\dfrac{1}{\mathrm{C}}q(t)+\mathrm{R}\cdot\dfrac{dq(t)}{dt}=\mathrm{E}$

$t=-0$ で、$q(-0)=0$

一般解は、$q(t)=q(t)_s+q(t)_t$(定常解＋過渡解)です。

ここで、$q(t)_s$ の「ｓ」は *steady style*、$q(t)_t$ の「ｔ」は *transient phonomena* の頭文字をとって記号化しています。

① 過渡解 q_t を求めます。

回路の方程式は、$\dfrac{1}{\mathrm{C}}\cdot q(t)+\mathrm{R}\cdot i(t)=0$ になります。この式も直列回路ですから作る方程式は電圧の方程式です。

$$\frac{1}{\mathrm{C}}\cdot q(t)+\mathrm{R}\cdot\frac{dq(t)}{dt}=0$$

$q(t)$ の一般解は、$q_t=\mathrm{K}\cdot e^{p\cdot t}$ です。電流との関係を $i(t)=\dfrac{dq(t)}{dt}=p\cdot\mathrm{K}\cdot e^{p\cdot t}$ とおいて、上の方程式を書き直します。

$(\dfrac{1}{\mathrm{C}}+\mathrm{R}\cdot p)\cdot\mathrm{K}\cdot e^{p\cdot t}=0$ この式から、過渡項を除いた式を作り、p に関する根（特性根）と次のように求めます。

$\dfrac{1}{\mathrm{C}}+\mathrm{R}\cdot p=0$、$\mathrm{R}\cdot p=-\dfrac{1}{\mathrm{C}}$ から $p=-\dfrac{1}{\mathrm{R}\cdot\mathrm{C}}$ です。

上式の「p」に代入し、過渡解（q_t）を $q_t=\mathrm{K}\cdot e^{-\frac{1}{\mathrm{R}\cdot\mathrm{C}}\cdot t}$ とします。

② 次に定常解 q_s を求めます。

$\mathrm{R}\cdot\dfrac{dq(t)_s}{dt}+\dfrac{1}{\mathrm{C}}q(t)_s=\mathrm{E}$、$q(t)_s=k$ は一定と仮定します。

$\dfrac{dq(t)_s}{dt}=0$、$\dfrac{1}{\mathrm{C}}\cdot q(t)_s=\mathrm{E}$、$q(t)_s=\mathrm{C}\cdot\mathrm{E}$

$q(t)=q(t)_\mathrm{s}+q(t)_t$（定常解＋過渡解）

$q(t)=\mathrm{CE}+\mathrm{K}\cdot e^{-\frac{1}{\mathrm{R}\cdot\mathrm{C}}\cdot t}$ に、初期条件 $t=0$、$q=0$ を代入して積分定数 k を求めます。

$$0=\mathrm{CE}+\mathrm{K}\cdot e^{-\frac{1}{\mathrm{R}\cdot\mathrm{C}}\cdot(0)}\qquad 0=\mathrm{CE}+\mathrm{k}\qquad \mathrm{k}=-\mathrm{CE}$$

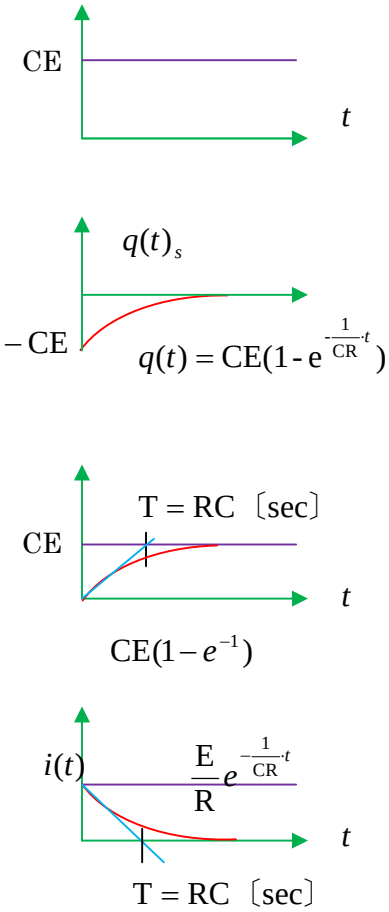
求めた積分定数を $k = -CE$ を $q(t) = CE + K \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$ に代入するとコンデンサを充電するときの電荷を蓄積する過渡現象が求まります。

$$q(t) = CE + (-CE)e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t} = CE \cdot (1 - e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t})$$

このとき回路に流れる電流は、蓄積する電荷の瞬時の変化率（微分）ですから、次式で求められます。

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt} CE \cdot (1 - e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}) = -\frac{1}{RC}(-CE)e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}) = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} \quad 〔A〕$$

この関係を下に図示します。



③ **電源 E から、$t = +0$ から ∞ に供給される電力を求めます。**

$W = W_C + W_R$ （C に蓄える電力＋R で消費する電力）

$$W_C = \int_0^{\infty} \frac{1}{C} \cdot q(t) \cdot i(t) = \frac{1}{C}\int_0^{\infty} q(t) \cdot i(t)dt = \frac{1}{C}\int_0^{\infty} q(t) \cdot \frac{dq(t)}{dt} \cdot dt = \frac{1}{C} \cdot q(t) \cdot dq\,t$$

$q=\int i(t)dt$ 、$i=\dfrac{dq(t)}{dt}$ により、$t=+0$ で $q(+0)=0$ 、$t=+\infty$ で $q(\infty)=\mathrm{CE}$

$$\mathrm{W_c}=\frac{1}{\mathrm{C}}\int_0^{\infty}q(t)\cdot dq=\int_0^{\mathrm{CE}}q(t)\cdot dq=\frac{1}{2\mathrm{C}}\left[q^2\right]_0^{\mathrm{CE}}=\frac{1}{2\mathrm{C}}\left[\mathrm{CE}\right]^2=\frac{\mathrm{CE}^2}{2}〔\mathrm{J}〕$$

$$\mathrm{W_R}=\int_0^{\infty}i(t)\cdot\mathrm{R}\cdot i(t)dt=\mathrm{R}\int_0^{\infty}i^2(t)dt$$

ここで $i(t)=\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\cdot e^{-\frac{1}{\mathrm{CR}}\cdot t}$ を代入します。

$$\mathrm{W_R}=\mathrm{R}\int_0^{\infty}\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\right)^2 e^{-\frac{2}{\mathrm{CR}}\cdot t}dt=\mathrm{R}\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\right)^2\left(\frac{1}{-\dfrac{2}{\mathrm{CR}}}\right)e^{-\left|\frac{2}{\mathrm{CR}}\cdot t\right|_0^{\infty}}=\frac{\mathrm{CE}^2}{2}〔\mathrm{J}〕$$

結局、RC 回路の電力は、$\mathrm{W_c}=\mathrm{W_R}$ （蓄積電力＝消費電力）になります。

これまで簡単な単エネルギ回路の過渡現象を説明してきましたが、実際に現場では、二階微分方程式や偏微分方程式など高度な手法で電気機器の故障解析が行われており、もっと詳しい説明を考えましたが、これ以上は入門書の域を超えますので RL 及び RC 回路の過渡現象に止めました。機会があればこれらの問題についても編集を考えたい。

第８章　ブール代数

英国の数学者ブール（*george boole*）が 1854 年　思考の法則に関する研究で提案した記号論理学をブール代数といいます。電気ではスイッチングやリレイ接点の動きを論理的に表すときに使用しますが、今日のコンピュータ技術の進歩は彼の業績ともいわれています。この章は、実務の上でシーケンス図を読み回路の動作を追いかける上で大切な分野ですから頑張って学習してください。

１．基本論理

基本演算子は３つで、すべての演算が表現できるのです。

ブール代数は、1 と 0 の 2 値で表す数を使用して、与えられた命題に対しそれが真であれば 1、偽であれば 0 という論理を正して行く数学ですが、この 2 値にその状態を加えて 3 値で全ての論理が実現するのです。

⑴ 論理否定（NOT : *not operation*）

論理関数 $f(\mathrm{A})=\bar{\mathrm{A}}$ を NOT といいます。

論理素子 A が A＝１のときその否定は $\bar{\mathrm{A}}=0$、また論理素子が A＝0 では、$\bar{\mathrm{A}}=1$ が否定になります。

このように論理の否定を行うことを NOT といい、論理素子の上にー：バーを付けて肯定素子と区別します。

肯定論理 A が「行く」とすると、その論理否定の $\bar{\mathrm{A}}$ は「行かない」となるのです。

これらの論理はリレイ等の接点の状態を表すときに活用でき、例えば、開いているときに 0 としてこれを肯定論理とすると、その閉じているときの否定は 1 になるように論理展開をするときの状態を表すものです。

⑵ 論理和（OR : *or operation*）

次は、$f(\mathrm{A},\mathrm{B})=\mathrm{A}+\mathrm{B}$ のたし算の論理です。

A,B の異なった論理の状態数を使ったたし算（A＋B）は論理和 OR といいます。

このたし算は､2 つたして 2 にする計算ではなくて 10 になる 2 進数のたし算です。

2 値の論理状態のたし算は、それぞれの論理の状態を一同に考える計算です。状態の組み合わせの種類は次のように 4 種類になります。

① $\mathrm{A}=0$、$\mathrm{B}=0$ のとき、$f(\mathrm{A},\mathrm{B})=\mathrm{A}+\mathrm{B}=0$

② $\mathrm{A}=0$、$\mathrm{B}=1$ のとき、$f(\mathrm{A},\mathrm{B})=\mathrm{A}+\mathrm{B}=1$

③ $\mathrm{A}=1$、$\mathrm{B}=0$ のとき、$f(\mathrm{A},\mathrm{B})=\mathrm{A}+\mathrm{B}=1$

④ $\mathrm{A}=1$、$\mathrm{B}=1$ のとき、$f(\mathrm{A},\mathrm{B})=\mathrm{A}+\mathrm{B}=1$

この論理和（OR *operation*）は、A または B のどちらかを選択する論理ですから、電気回路では並列回路を考えるときの論理になります。

⑶ 論理積（AND : *and operation*）

次は、$f(\mathrm{A},\mathrm{B})=\mathrm{A}\bullet\mathrm{B}$ のかけ算の論理です。

ここで論理のかけ算を 10 進数のかけ算と区別するために $A \bullet B$ としました。

論理のかけ算はそれぞれの状態の論理を繋いでいく論理で次の 4 種類になります。

① $A=0$、$B=0$ のとき、$f(A,B)=A \bullet B=0$

② $A=0$、$B=1$ のとき、$f(A,B)=A \bullet B=0$

③ $A=1$、$B=0$ のとき、$f(A,B)=A \bullet B=0$

④ $A=1$、$B=1$ のとき、$f(A,B)=A \bullet B=1$

この論理積（AND *operation*）は、A かつ B ですからどちらかを選択する論理ではなく、A であって B ですから、論理の接続になり電気回路では直列回路を考えるときの論理になります。

2．ブール代数と論理の計算

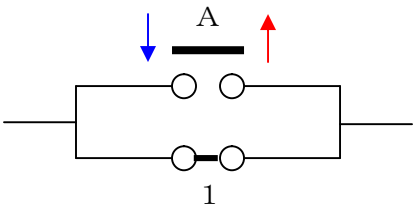
論理数学の概要がお分かりいただいたところで、今度はブール代数の約束とその意味をリレイの接点ではどのようになるかを説明し、電気部品の動作が論理に整合することを学習します。

(1) 公理と法則

A、B、C は、接点の名称とします。＋は並列接続、●は直列接続、＝は論理の結果、出力（存在の有無）があるとき 1、ないとき 0、$\overline{A}$ は A の状態を否定、$\overline{\overline{A}}$ は状態の二重否定として接点回路を作って論理数学なるものを体験します。

① A＋１＝１

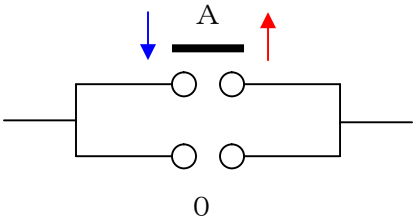
A の接点と接続導体が並列接続された論理です。



回路が通じるとき「１」とすると、この式は接点 A の動作に関わらず出力するので「１」になるので「＝１」である。

② A＋０＝A

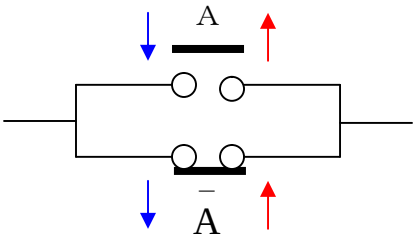
A の接点と空の端子が並列接続された論理です。



接点 A の要素のみの回路であるため、出力は A です。

③　$A+\bar{A}=1$

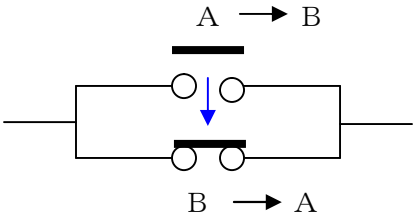
Ａのメイク接点とブレイク接点の並列論理です。



接点Ａの動作と同時に並列の論理否定接点が開放する回路。
常に出力回路が形成され「１」です。

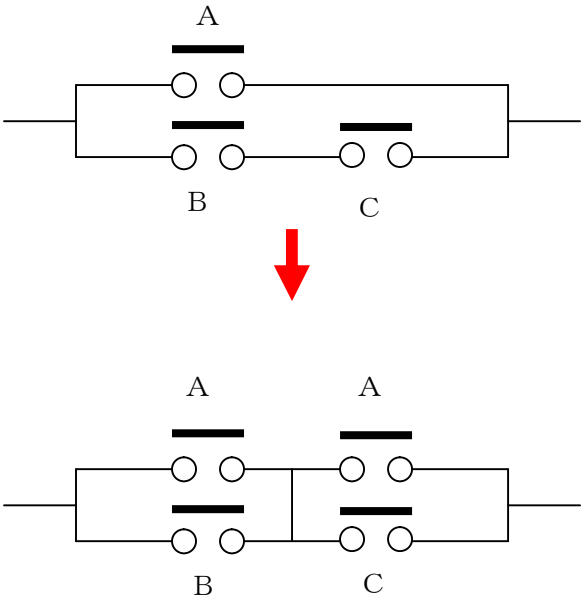
④　$A+B=B+A$

ＡＢの接点の並列の順序を入れ替えても出力は同じです。



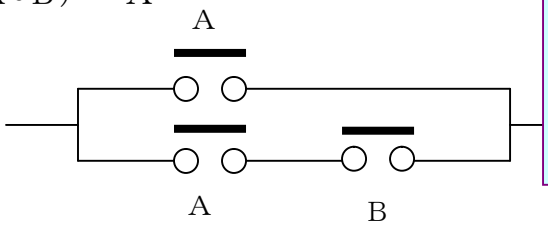
並列の接点ＡＢの動作回路は並列の順序を入れ替えても出力は同じです。

⑤　$A+(B\bullet C)=(A+B)\bullet(A+C)$：分配則



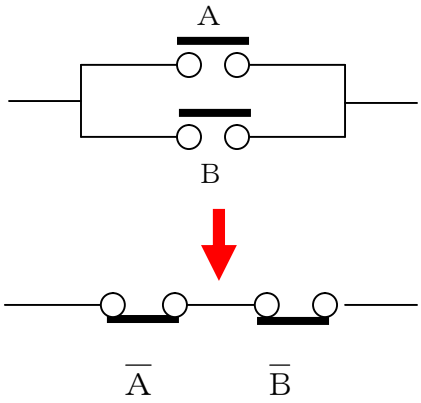
接点Ｂと直列のＣは、Ａ接点動作と等価であり、ＢとＣの論理積の双方の並列要素となる。
（分配則律）

⑥　A＋（A•B）＝A



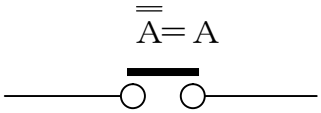
接点Ａと並列に挿入する接点Ｂ、Ｃの直列接続は接点Ａの出力に代表され、Ｂ要素は不要。従ってＡ。

⑦　$\overline{A+B}=\overline{A}\bullet\overline{B}$



並列接続の肯定要素ＡとＢの否定は、並列接続と肯定酔うその否定です。

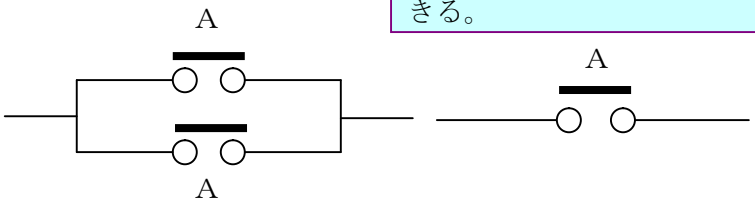
⑧　$\overline{\overline{A}}=A$



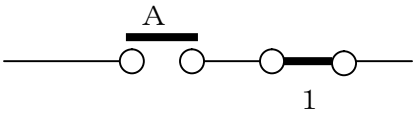
状態の論理否定は元の状態

⑨　A＋A＝A

重複論理の出力は１つに集約できる。

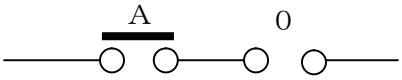


⑩　A•1＝A

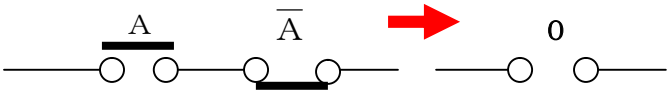


接点Ａの導体の接続要素との積の出力はＡです。

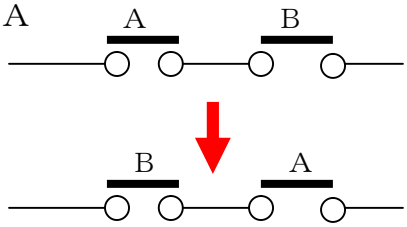
⑪　A•0＝0



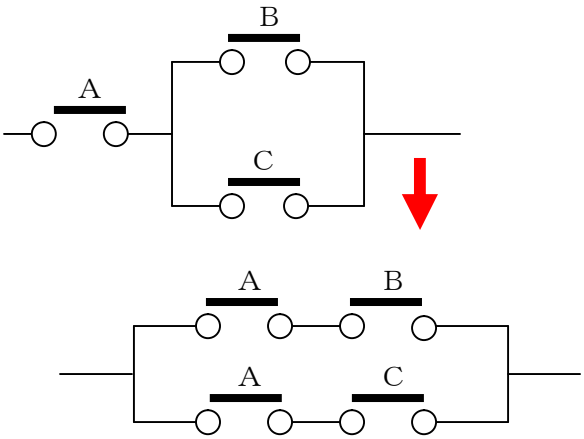
⑫ $A \bullet \overline{A} = 0$



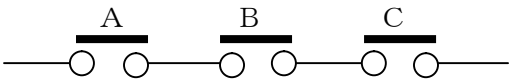
⑬ $A \bullet B = B \bullet A$



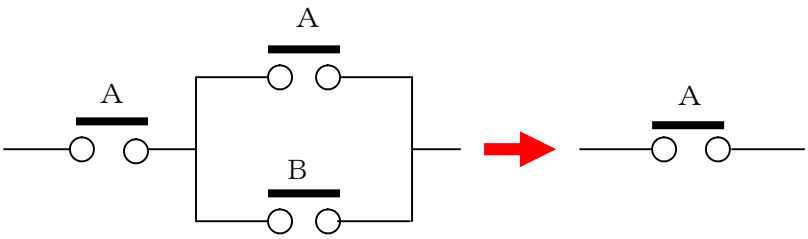
⑭ $A \bullet (B + C) = (A \bullet B) + (A \bullet C)$



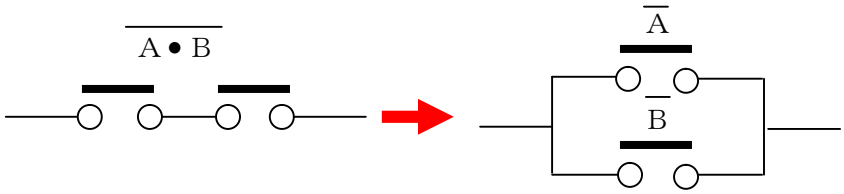
⑮ $A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C$



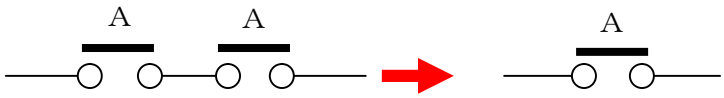
⑯ $A \bullet (A + B) = A$



⑰　$\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$



⑱　$A \bullet A = A$



３．身近な論理の世界

論理数学は私たちに新しい工学分野を提供し,船内の制御システムの発展に大きく貢献しています。

リレーで説明した①～⑱までの論理は、順序や冗長、保護・増幅といった回路に活用され、船舶の電力の制御や保護、監視、警報、負荷管制といった機能作りに活用されています。この分野の数学は、複素数やベクトルが電気の数学といったように、電気では非常に重要な数学とされています。

しかし、最初のうちは物理的な思考と全く異なった論理的思考に戸惑って、難しいと悲鳴を上げる人も少なくありません。

電気の図面は、電路布設図や系統図を除けば、多かれ少なかれその内容は論理を含んだ動作図から成り立っていますので、修理や整備、電装工事を行うとき、システムを理解する上で、論理は翻訳装置としての役割を担っています。

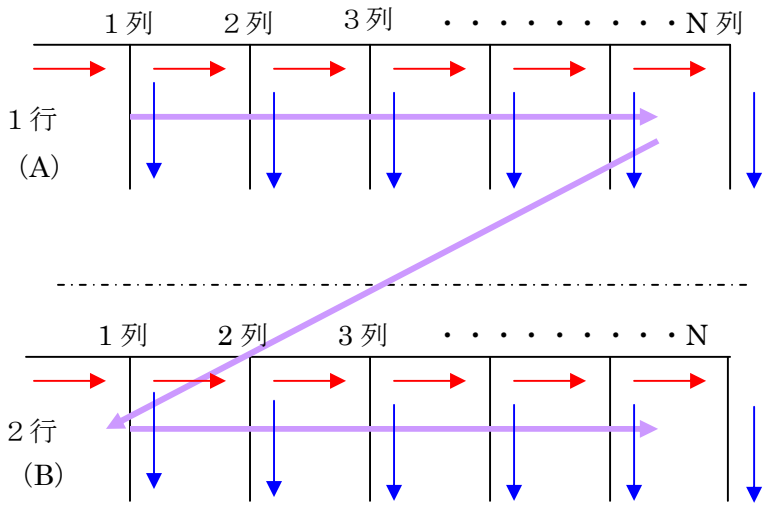
電気に携わる人は、まず、この図面を読むことから始まりますが、図面が読めるか読めないかによって仕事の進捗は大きく変わるものです。

まず、図面を読むためのコツをご紹介して論理の紹介を終えます。

(1) 電気の図面はどのように書かれているか

船舶の電気の図面は、横書きの場合には左から右、上から下に書かれ、行数には１行から複数行、列は１列から複数列に論理部品が置かれるように書かれます。

したがって動作の進捗は、１行１列→１行２列･･･１行Ｎ列というように書かれ、右端に行くと、次は２行の開始列の２行１列→２行２列･･･Ｎ列といったように行と列を組み合わせ、左から右に動作が進む順序で書かれます。



制御図は、膨大な信号の接点の集合となっていますから１枚で表せないのがほとんどで、接点はいくつものページにまたがって複雑に組み合わさっています。

そのような図面では、接点の行先ページを探すうちに、これまで記憶していた接点の意味や目的を失念し、いつまで立っても機能の把握ができないことになります。

このような複雑な回路図（シーケンス図といいます。）では、接点を配る元の機器に番号を振り、行き先ページの表示や、その接点の列番号を表して、配られたページの接点にも元の機器の表示を行うようにしています。

また、上図に示した図の列上に、その列がどのような機能を果たしているか、記述することもあります。このような回路図を読み、記述の機能を了解していこうとするには、よほどスラスラと読んで行かなければ、目的の時間までに間違いの発見や希望回路であるかの判断はつかないものです。

電気の制御回路図は、一般的に電源が入っていない状態（電源スイッチが開放されている状態）で書かれています。当然、機器は停止状態、制御指令も出されていない状態で表されていて、記述されている機器は全て動かすための準備ができた状態となっています。

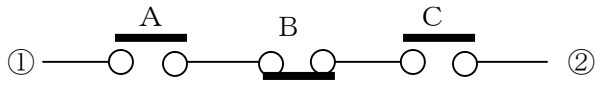
その他では制御システムによっては、電気回路以外（機械系）の安全装置（始動インターロック）や他の制御に関連する機器の準備ができている条件が必要になりますが、電気の制御に組込むことができないものは、図面に人為的な操作を要求する記述があります。電気とは違うといって無視することがないように努々注意が必要です。

(2) さて、次は、接点の追いかけ方です

ここではａ接点とｂ接点を例にして読み方を紹介します。ａ接点は、電源が入り部品が動作したとき電気回路を形成する閉接点です。電源がないときは開になる部

品です。ｂ接点は、電源が入っていないとき電気回路を形成する閉接点です。電源があれば開になる部品です。

下の図のＡ、Ｃは肯定、Ｂは否定の要素からできていますが、接点回路の意味は、「～A が入る、B が入ってないとき、C が入る、そのときに①から②に電気回路ができる～」という論理ですが、初学者がこのような回路を読みこなして行くためにはどのように教えれば良いでしょう。



船舶の設備機器は、その殆どが規則や基準で作られますから、繰り返し読破して行くうちに、これは間違いとか、これで良いとかの判断が付いてくるようになりますが、そこまで到達するためには読んで理解する、所謂、訓練が必要になるのです。

そこで、先輩達は次のような学習順序を教えるので、時間は要しても訓練と思って頑張って下さい。

【論理回路（シーケンス図）の読解方法】

① 図面（回路図）の中の接点に用向き機能を記入する。

② 図面に行先を記入する。

③ 接点を行→列→上→下→行→列→上下の順に記入した用向き機能を声を出して読みあげ辿って行きます。（声を出して読み上げることは記憶を濃いものにできます。）

④ 回路に矛盾を感じたときは、論理関数を作って全ての組あわせがフェールセーフになっているか確認（検証）する。

あとがき

全編を通してご覧いただき、いかがでしたでしょうか？かなりボリュームのある内容に驚かれる方も多かったことでしょう。本書は日本船舶電装協会の技術部長である柳樂氏が企画され、造船や舶用工業に携わるエキスパートエンジニアの方々が賛同して執筆をご担当された奇跡の一冊です。柳樂氏は長く海上保安学校にて船舶の電気に関する教鞭をとられ、多くの優秀な海上保安官を世に送り出してこられた教育者であると同時に、研究所では多くの研究成果と特許を保有する優れた研究者としての一面を持っておられます。氏は長年に亘って舶用電気の研究・教育に携わる中で、「現象としての電気の理解は、物事の根本である基礎物理を理解することにより深まる」との信念を持ちました。一方でそうした基礎物理から電気の根本をわかりやすく解説する教科書はこれまでありませんでした。そこで、本書は氏の信念に共鳴したエキスパートエンジニアの方々が筆をとる形で実現し、世に送り出されることとなったわけです。

本書の第１編は、電気工学入門と題して図絵と言葉によって、「電気とは何」という素朴な疑問を解決しようと編集しています。第１章と第２章は、中西委員及び梶田委員がそれぞれ執筆し物性から繰り出される美しい世界を案内しています。第３章は、身近な照明器具を使って、今井委員が、電気の流れる道筋と電気抵抗を執筆、第 4、５章は、ユニークな挿絵を使って体感するような感覚で、仕事と電力量が学習できるように福永委員が執筆、第６章は、図絵を通して電気現象が短時間に理解できるように草間委員が執筆、また、各章に挿入した図絵は柏原委員が作成しました。第２編では、難しいとされている交流も図絵と波形だけで習得できるように関戸委員が創意工夫しながら執筆しています。

本書の利用の仕方は様々だと思います。電気工学的な内容の第１編よりも即実戦で必要になりそうな第２編から参考にされる方もいらっしゃるでしょう。一方でじっくり根本原理から理解していきたいという方は第一章から始められることでしょう。また、船舶電装士や主任船舶電装士、さらには船舶電装管理者の資格取得を目指すための勉強で、ちょっとした計算をするのに本書の付録「基礎数学」は多いに役立つこととなるでしょう。

日本船舶電装協会では電装業務に携わる方々の業務の一助となるよう、これまで様々な本を出版しています。そのような書籍の副読本・参考書としても、本書をお役立ていただければ幸いです。

校閲　国立大学法人　東京海洋大学
大学院海洋科学技術研究科
准教授　工学博士　木船　弘康